

入学試験過去問題

数 学

東京大学（理科）

対象年度：1977年

試験時間：150分

問題数：8問

配点：120点

- 第5(A)問と第5(B)問から1問を選択して解答
- 第6(A)問と第6(B)問から1問を選択して解答

第 1 問

k を実数の定数とすると、 x の関数 $f(x) = |x^3 - 3kx|$ が $-1 \leq x \leq 1$ の範囲でとる最大値を $M(k)$ で表す。 k が実数全体を動くとき、 $M(k)$ が最小となる k の値および $M(k)$ の最小値を求めよ。

第 2 問

xy 平面上の, 原点 O とは異なる 2 点 $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ に対し, $OA = a$, $OB = b$, $\angle AOB = \theta$ とおく。2 点 A, B の座標 a_1, a_2, b_1, b_2 が有理数であるとき, 次の 3 条件はたがいに同値であることを証明せよ。

- i) ab は有理数である。
- ii) $\cos \theta$ は有理数である。
- iii) $\sin \theta$ は有理数である。

第 3 問

xy 平面上に, 不等式で表される 3 つの領域 $A: x \geq 0$, $B: y \geq 0$, $C: \sqrt{3}x + y \leq \sqrt{3}$ をとる。いま任意の点 P に対し, P を中心として A , B , C のどれか少なくとも 1 つに含まれる円を考える。

このような円の半径の最大値は点 P によって定まるから, これを $r(P)$ で表すことにする。

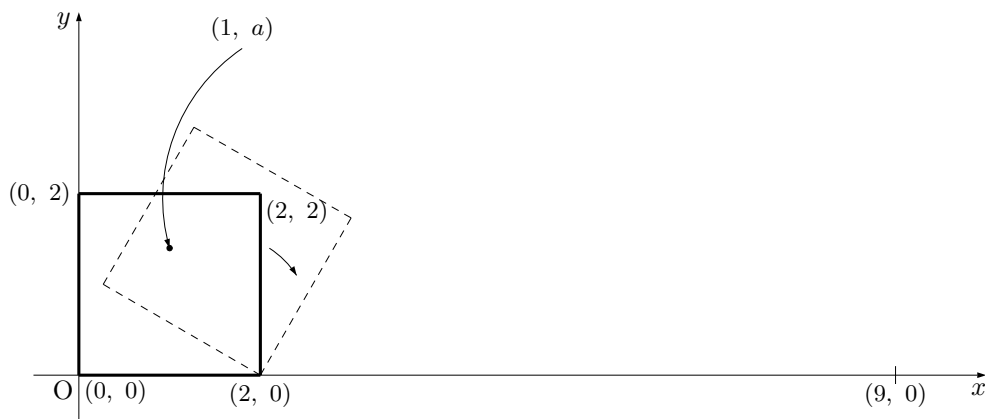
- i) 点 P が $A \cap C$ から $(A \cap C) \cap B$ を除いた部分を動くとき, $r(P)$ の動く範囲を求めよ。
- ii) 点 P が平面全体を動くとき, $r(P)$ の動く範囲を求めよ。

第 4 問

正方形 S の頂点 A_1, A_2, A_3, A_4 がそれぞれ xy 平面上の点 $(0, 0), (2, 0), (2, 2), (0, 2)$ の位置にあるとき、点 $(1, a)$ の位置にある正方形 S 内の点を P とする。ただし、 $0 \leq a \leq 2$ とする。

正方形 S が上の位置から出発し、第一象限内において x 軸上をその正の向きに滑らずにころがって行くとき、点 P が動いてできる曲線を C とする。3 直線 $x = 1, x = 9, y = 0$ と曲線 C とで囲まれる図形を、 x 軸のまわりに 1 回転してできる立体を考え、その体積を $V(a)$ で表す。

$V(a)$ を a の式で表せ。 a が $0 \leq a \leq 2$ の範囲を動くとき、 $V(a)$ が最小となる a の値および $V(a)$ の最小値を求めよ。



第 5 (A) 問

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$, $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = J$ と書く。行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と実数 t に対し

$$A(I - tJ) = I + tJ$$

という関係が成り立つとき、 a, b, c, d を t の式で表せ。

また t が実数全体を動くとき、関係 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ で定まる点 (x, y) が動いてできる図形を求め、これを図示せよ。

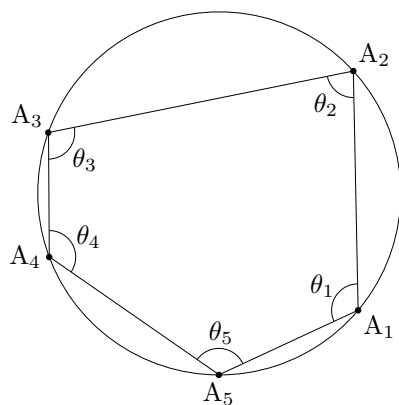
第 5 (B) 問

$\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5$ を正の数とする。図のように円に内接する 5 角形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ で、 $1 \leq i \leq 5$ に対し角 A_i の大きさが θ_i となるものが存在するためには、

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 = 3\pi, \quad \theta_1 + \theta_3 > \pi, \quad \theta_2 + \theta_4 > \pi,$$

$$\theta_3 + \theta_5 > \pi, \quad \theta_1 + \theta_4 > \pi, \quad \theta_2 + \theta_5 > \pi$$

が同時に成り立つことが必要かつ十分であることを証明せよ。



第 6 (A) 問

座標の定められた空間において、直線 l は 2 点 $(1, 1, 0)$, $(2, 1, 1)$ を通り、直線 m は 2 点 $(1, 1, 1)$, $(1, 3, 2)$ を通る。

- i) l を含み m に平行な平面の方程式を $ax + by + cz + d = 0$ の形に表せ。
- ii) 点 $(2, 0, 1)$ を通り、 l , m の両方と交わる直線を n とする。 l と n の交点および m と n の交点を求めよ。

第 6 (B) 問

a を正の定数とし, $0 \leq x \leq 2\pi$ の範囲で関数

$$f(x) = -\cos x - \frac{a}{4} \cos 2x$$

を考える。

- i) $f(x)$ の最大値, 最小値を求めよ。
- ii) a の値の変化に応じて, $f(x)$ のグラフの変曲点の個数はどのように変化するか。また, この個数の変化に応じて, $f(x)$ のグラフの凹凸はどのように変化するか。