

入 学 試 験 問 題



数 学 (理科)

(配点 120 点)

1977 年度 試験時間 150 分

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、手を挙げて監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 2 枚の解答用紙が渡されますが、青色刷りの第 1 解答用紙には、第 1 問～第 3 問について、茶色刷りの第 2 解答用紙には、第 4 問～第 6 問について解答しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号（表面 2 箇所、裏面 1 箇所）、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外にこれらを記入してはいけません。
- 6 解答は、必ず解答用紙の指定された箇所に記入しなさい。
- 7 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。また、解答用紙の欄外の余白には、何も書いてはいけません。
- 8 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 9 解答用紙は、持ち帰ってはいけません。
- 10 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

第 1 問

k を実数の定数とすると、 x の関数 $f(x) = |x^3 - 3kx|$ が $-1 \leq x \leq 1$ の範囲でとる最大値を $M(k)$ で表す。 k が実数全体を動くとき、 $M(k)$ が最小となる k の値および $M(k)$ の最小値を求めよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

第 2 問

xy 平面上の, 原点 O とは異なる 2 点 $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ に対し, $OA = a$, $OB = b$, $\angle AOB = \theta$ とおく。2 点 A , B の座標 a_1, a_2, b_1, b_2 が有理数であるとき, 次の 3 条件はたがいに同値であることを証明せよ。

- i) ab は有理数である。
- ii) $\cos \theta$ は有理数である。
- iii) $\sin \theta$ は有理数である。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

第 3 問

xy 平面上に, 不等式で表される 3 つの領域 $A: x \geq 0, B: y \geq 0, C: \sqrt{3}x + y \leq \sqrt{3}$ をとる。いま任意の点 P に対し, P を中心として A, B, C のどれか少なくとも 1 つに含まれる円を考える。

このような円の半径の最大値は点 P によって定まるから, これを $r(P)$ で表すことにする。

- i) 点 P が $A \cap C$ から $(A \cap C) \cap B$ を除いた部分を動くとき, $r(P)$ の動く範囲を求めよ。
- ii) 点 P が平面全体を動くとき, $r(P)$ の動く範囲を求めよ。

計 算 用 紙

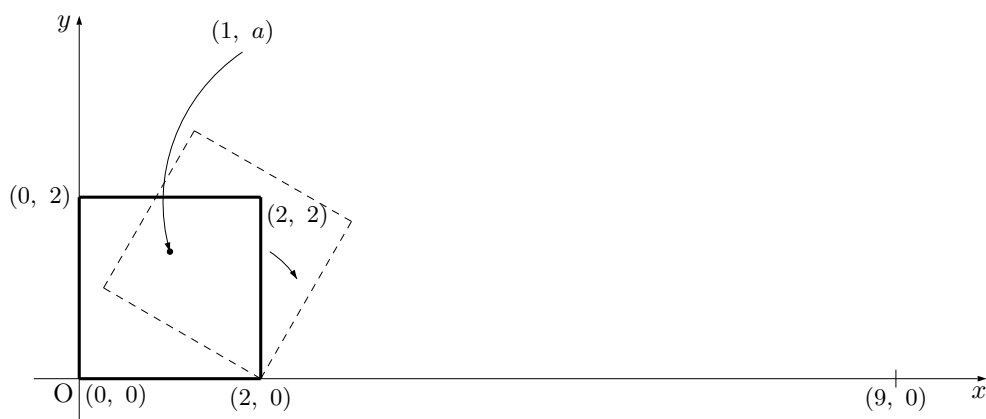
(切り離さないで用いよ。)

第 4 問

正方形 S の頂点 A_1, A_2, A_3, A_4 がそれぞれ xy 平面上の点 $(0, 0), (2, 0), (2, 2), (0, 2)$ の位置にあるとき、点 $(1, a)$ の位置にある正方形 S 内の点を P とする。ただし、 $0 \leq a \leq 2$ とする。

正方形 S が上の位置から出発し、第一象限内において x 軸上をその正の向きに滑らずにころがって行くとき、点 P が動いてできる曲線を C とする。3 直線 $x = 1, x = 9, y = 0$ と曲線 C とで囲まれる図形を、 x 軸のまわりに 1 回転してできる立体を考え、その体積を $V(a)$ で表す。

$V(a)$ を a の式で表せ。 a が $0 \leq a \leq 2$ の範囲を動くとき、 $V(a)$ が最小となる a の値および $V(a)$ の最小値を求めよ。



計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

第 5 問

(A), (B) から 1 つ選んで解答せよ。

(A)

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$, $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = J$ と書く。行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と実数 t に対し

$$A(I - tJ) = I + tJ$$

という関係が成り立つとき, a, b, c, d を t の式で表せ。

また t が実数全体を動くとき, 関係 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ で定まる点 (x, y) が動いてできる図形を求め, これを図示せよ。

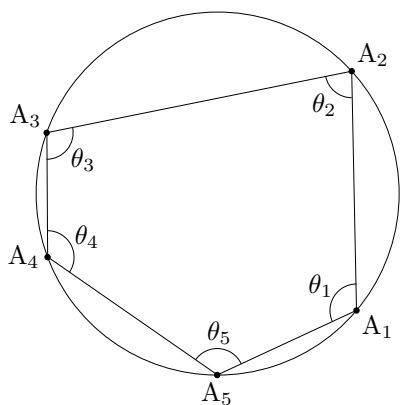
(B)

$\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5$ を正の数とする。図のように円に内接する 5 角形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ で, $1 \leq i \leq 5$ に対し角 A_i の大きさが θ_i となるものが存在するためには,

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 = 3\pi, \quad \theta_1 + \theta_3 > \pi, \quad \theta_2 + \theta_4 > \pi,$$

$$\theta_3 + \theta_5 > \pi, \quad \theta_1 + \theta_4 > \pi, \quad \theta_2 + \theta_5 > \pi$$

が同時に成り立つことが必要かつ十分であることを証明せよ。



計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

第 6 問

(A), (B) から 1 つ選んで解答せよ。

(A)

座標の定められた空間において、直線 l は 2 点 $(1, 1, 0)$, $(2, 1, 1)$ を通り、直線 m は 2 点 $(1, 1, 1)$, $(1, 3, 2)$ を通る。

- i) l を含み m に平行な平面の方程式を $ax + by + cz + d = 0$ の形に表せ。
- ii) 点 $(2, 0, 1)$ を通り、 l , m の両方と交わる直線を n とする。 l と n の交点および m と n の交点を求めよ。

(B)

a を正の定数とし、 $0 \leq x \leq 2\pi$ の範囲で関数

$$f(x) = -\cos x - \frac{a}{4} \cos 2x$$

を考える。

- i) $f(x)$ の最大値, 最小値を求めよ。
- ii) a の値の変化に応じて、 $f(x)$ のグラフの変曲点の個数はどのように変化するか。
また、この個数の変化に応じて、 $f(x)$ のグラフの凹凸はどのように変化するか。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

