

入学試験過去問題

数 学

東京大学（理科）

対象年度：1976 年

試験時間：150 分

問題数：9 問

配点：120 点

- 第 3(A) 問と第 3(B) 問から 1 問を選択して解答
- 第 5(A) 問と第 5(B) 問から 1 問を選択して解答
- 第 6(A) 問と第 6(B) 問から 1 問を選択して解答

第 1 問

負でない実数 r, l に対して, xy 平面上の曲線

$$y = \begin{cases} x^2 & (0 \leq x \leq r) \\ r^2 & (r \leq x \leq l+r) \\ (x-l-2r)^2 & (l+r \leq x \leq l+2r) \end{cases}$$

を考え, これを x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積を V とする。 r^2 と l の和が正の定数 c になるように r と l を変化させるとき, V の最大値を与えるような r と l の値を求めよ。

第 2 問

時刻 $t = 0$ に原点を出発し、 xy 平面上で次の条件 (i), (ii) に従っていろいろに運動する動点 P がある。

- (i) $t = 0$ における P の速度を表すベクトルの成分は $(1, \sqrt{3})$ である。
- (ii) $0 < t < 1$ において、 P は何回か (1 回以上有限回) 直角に左折するが、そのときを除けば P は一定の速さ 2 で直進する。(ただし、左折するのに要する時間は 0 とする。)

このとき、時刻 $t = 1$ において P が到達する点を Q として、 Q の存在しうる範囲を図示せよ。

第 3 (A) 問

点 $P(x, y)$ は xy 平面上の円 $C: (x-5)^2 + (y-5)^2 = r^2$ ($r > 0$) の上を動く動点である。このとき点 P の点 $A(9, 0)$ に関する対称点を Q とし、また点 P を原点 O のまわりに正の向きに $\frac{\pi}{2}$ だけ回転した点を R とする。点 P が円 C の上を動くときの線分 QR の長さの最小値 $f(r)$ と最大値 $g(r)$ を求めよ。また $f(r)$ が 0 となるような r の値を求めよ。

第 3 (B) 問

xy 平面上に 3 つの円 A, B, C があって、それぞれ

$$A: x^2 + y^2 = 9, \quad B: (x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 4, \quad C: (x - 5)^2 + (y + 3)^2 = 1$$

で表される。この平面上の点 P から円 A, B, C に接線が引けるとき、 P からそれらの接点までの距離をそれぞれ $\alpha(P), \beta(P), \gamma(P)$ とする。このとき

$$\alpha(P)^2 + \beta(P)^2 + \gamma(P)^2 = 99$$

となる点 P の全体が作る曲線を図示し、その長さを求めよ。

第 4 問

$0 < t < 1$ であるような t のおのおのの値に対して、 x の関数

$$f(x) = \frac{x+t}{x(1-tx)}$$

を考える。

- (i) 区間 $0 < x < 1$ において $f(x)$ の最小値を与える x の値 α は t に関係して定まる数である。 t が 0 から 1 に向かって動くとき、点 $(\alpha, f(\alpha))$ はどのように動くかを図示せよ。
- (ii) 区間 $0 < x \leq t$ において $f(x)$ の最小値を与える x の値を β とする。 t が 0 から 1 に向かって動くとき、点 $(\beta, f(\beta))$ はどのように動くかを図示せよ。

第 5 (A) 問

z 軸を軸とする半径 1 の円柱の側面で, xy 平面より上 (z 軸の正の方向) にあり, 平面 $x - \sqrt{3}y + z = 1$ より下 (z 軸の負の方向) にある部分を D とする。 D の面積を求めよ。

第 5 (B) 問

点 P は xy 平面の原点 O を時刻 $t = 0$ に出発して、 x 軸上を正の向きに動く。時刻 t において

x 軸, 曲線 $y = \frac{x^2 + 1}{x + 1}$, y 軸, P を通って y 軸に平行な直線

で囲まれた図形の面積を S とする。 P が点 $(x, 0)$ を通過するときの S の変化率 $\frac{dS}{dt}$ は $x^2 + 1$ に等しいという。このとき S を t の式で表せ。ただし P の座標は時刻 t の微分可能な関数とする。

第 6 (A) 問

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$ とおく。実数 a, b に対し $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$ とおく。いま $xI + yA$ (x, y は実数) の形に表される行列全体からなる集合を R とし, R から O を除いた集合を G とする。

- (i) R に属する任意の 2 つの行列の積は R に属することを示せ。
- (ii) G に属する任意の行列が逆行列をもつとき, 点 (a, b) はどのような範囲にあるか。これを図示せよ。

第 6 (B) 問

a, b, c, d を実数として $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ とおく。

- (i) 方程式 $f(x) = 0$ が 4 個の相異なる実根をもつとき、実数 k に対して、方程式 $f(x) + kf'(x) = 0$ の実根の個数を求めよ。
- (ii) 2 つの方程式 $f(x) = 0, f''(x) = 0$ が 2 個の相異なる実根を共有するとき、曲線 $y = f(x)$ は y 軸に平行なある直線に対して対称であることを示せ。