入　学　試　験　問　題　前

数　学（理科）

（配点 120 点）

1976 年度　　試験時間　150 分

注　意　事　項

1　試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはいけません。

2　落丁，乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら，手を挙げて監督者に知らせなさい。

3　解答には，必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。

4　2 枚の解答用紙が渡されますが，青色刷りの第 1 解答用紙には，第 1 問〜第 3 問について，茶色刷りの第 2 解答用紙には，第 4 問〜第 6 問について解答しなさい。

5　**解答用紙の指定欄に，受験番号（表面 2 箇所，裏面 1 箇所），科類，氏名を記入しなさい。指定欄以外にこれらを記入してはいけません。**

6　**解答は，必ず解答用紙の指定された箇所に記入しなさい。**

7　**解答用紙の解答欄に，関係のない文字，記号，符号などを記入してはいけません。また，解答用紙の欄外の余白には，何も書いてはいけません。**

8　この問題冊子の余白は，計算用に使用してもよいが，どのページも切り離してはいけません。

9　解答用紙は，持ち帰ってはいけません。

10　試験終了後，問題冊子は持ち帰りなさい。

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

第　1　問

負でない実数 r，l に対して，xy 平面上の曲線

$$y = \begin{cases} x^2 & (0 \leqq x \leqq r) \\ r^2 & (r \leqq x \leqq l + r) \\ (x - l - 2r)^2 & (l + r \leqq x \leqq l + 2r) \end{cases}$$

を考え，これを x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積を V とする。r^2 と l の和が正の定数 c になるように r と l を変化させるとき，V の最大値を与えるような r と l の値を求めよ。

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

第　2　問

時刻 $t=0$ に原点を出発し，xy 平面上で次の条件 (i)，(ii) に従っていろいろに運動する動点 P がある。

(i)　$t=0$ における P の速度を表すベクトルの成分は $\left(1,\ \sqrt{3}\right)$ である。

(ii)　$0<t<1$ において，P は何回か（1 回以上有限回）直角に左折するが，そのときを除けば P は一定の速さ 2 で直進する。（ただし，左折するのに要する時間は 0 とする。）

このとき，時刻 $t=1$ において P が到達する点を Q として，Q の存在しうる範囲を図示せよ。

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

第　3　問

（A），（B）から 1 つ選んで解答せよ。

(A)

点 P $(x,\ y)$ は xy 平面上の円 $C:\ (x-5)^2+(y-5)^2=r^2\ (r>0)$ の上を動く動点である。このとき点 P の点 A $(9,\ 0)$ に関する対称点を Q とし，また点 P を原点 O のまわりに正の向きに $\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転した点を R とする。点 P が円 C の上を動くときの線分 QR の長さの最小値 $f(r)$ と最大値 $g(r)$ を求めよ。また $f(r)$ が 0 となるような r の値を求めよ。

(B)

xy 平面上に 3 つの円 A，B，C があって，それぞれ

$$A:\ x^2+y^2=9,\quad B:\ (x-4)^2+(y-3)^2=4,\quad C:\ (x-5)^2+(y+3)^2=1$$

で表される。この平面上の点 P から円 A，B，C に接線が引けるとき，P からそれらの接点までの距離をそれぞれ $\alpha(\mathrm{P})$，$\beta(\mathrm{P})$，$\gamma(\mathrm{P})$ とする。このとき

$$\alpha(\mathrm{P})^2+\beta(\mathrm{P})^2+\gamma(\mathrm{P})^2=99$$

となる点 P の全体が作る曲線を図示し，その長さを求めよ。

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

第　4　問

$0 < t < 1$ であるような t のおのおのの値に対して，x の関数

$$f(x) = \frac{x+t}{x(1-tx)}$$

を考える。

(i) 区間 $0 < x < 1$ において $f(x)$ の最小値を与える x の値 α は t に関係して定まる数である。t が 0 から 1 に向かって動くとき，点 $(\alpha,\ f(\alpha))$ はどのように動くかを図示せよ。

(ii) 区間 $0 < x \leqq t$ において $f(x)$ の最小値を与える x の値を β とする。t が 0 から 1 に向かって動くとき，点 $(\beta,\ f(\beta))$ はどのように動くかを図示せよ。

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

第　5　問

（A），（B）から 1 つ選んで解答せよ。

(A)

z 軸を軸とする半径 1 の円柱の側面で，xy 平面より上（z 軸の正の方向）にあり，平面 $x-\sqrt{3}y+z=1$ より下（z 軸の負の方向）にある部分を D とする。D の面積を求めよ。

(B)

点 P は xy 平面の原点 O を時刻 $t=0$ に出発して，x 軸上を正の向きに動く。時刻 t において

$$x\text{ 軸},\quad \text{曲線 } y=\frac{x^2+1}{x+1},\quad y\text{ 軸},\quad \text{P を通って } y \text{ 軸に平行な直線}$$

で囲まれた図形の面積を S とする。P が点 $(x,\ 0)$ を通過するときの S の変化率 $\dfrac{dS}{dt}$ は x^2+1 に等しいという。このとき S を t の式で表せ。ただし P の座標は時刻 t の微分可能な関数とする。

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

第　6　問

（A），（B）から 1 つ選んで解答せよ。

（A）

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$，$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$ とおく。実数 a，b に対し $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$ とおく。いま $xI + yA$（x，y は実数）の形に表される行列全体からなる集合を R とし，R から O を除いた集合を G とする。

(i)　R に属する任意の 2 つの行列の積は R に属することを示せ。

(ii)　G に属する任意の行列が逆行列をもつとき，点 $(a,\ b)$ はどのような範囲にあるか。これを図示せよ。

（B）

a，b，c，d を実数として $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ とおく。

(i)　方程式 $f(x) = 0$ が 4 個の相異なる実根をもつとき，実数 k に対して，方程式 $f(x) + kf'(x) = 0$ の実根の個数を求めよ。

(ii)　2 つの方程式 $f(x) = 0$，$f''(x) = 0$ が 2 個の相異なる実根を共有するとき，曲線 $y = f(x)$ は y 軸に平行なある直線に対して対称であることを示せ。

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）