

入学試験過去問題

数 学

東京大学（理科）

対象年度：1975 年

試験時間：150 分

問題数：6 問

配点：120 点

第 1 問

三角形 ABC において、 $BC = 32$ ， $CA = 36$ ， $AB = 25$ とする。この三角形の二辺の上に両端をもつ線分 PQ によって、この三角形の面積を二等分する。そのような PQ の長さが最短になる場合の、P と Q の位置を求めよ。

第 2 問

k, l, m, n は負でない整数とする。0 でないすべての x に対して等式

$$\frac{(x+1)^k}{x^l} - 1 = \frac{(x+1)^m}{x^n}$$

を成り立たせるような k, l, m, n の組を求めよ。

第 3 問

直線 $x + y = 4$ に第一象限において接する放物線 $y = -ax^2 + bx$ がある。この放物線と x 軸の正の部分とで囲まれる図形の面積が最大となるときの a, b の値とその場合の面積を求めよ。

第 4 問

数列 $\{a_n\}$ の項が

$$a_1 = \sqrt{2}, \quad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

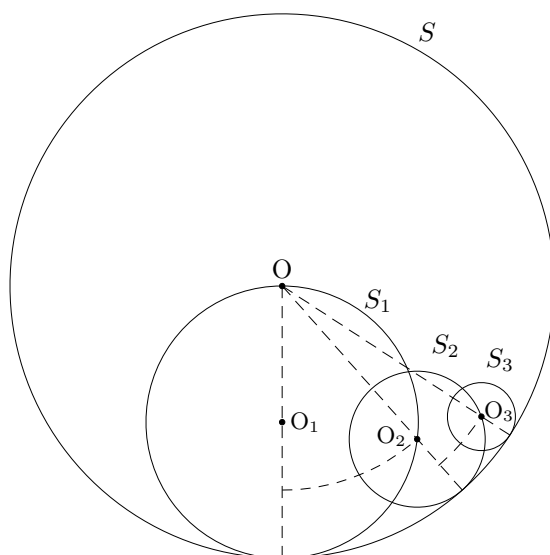
によって与えられているものとする。このとき $a_n = 2 \sin \theta_n$, $0 < \theta_n < \frac{\pi}{2}$ を満たす θ_n を見いだせ。また, $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n$ を求めよ。

第 5 問

図のように球 S に内接する球の列 S_n , $n = 1, 2, 3, \dots$ がある。 S の中心 O と S_n の中心 O_n はすべて同一平面上にあり、 O_{n+1} は S_n の表面上にあって、この平面上において O_{n+2} と O_n は直線 OO_{n+1} に関して互いに反対側にある。また S の半径は a , S_n の半径は $\frac{a}{2^n}$ である。このとき、

(i) S_n と S_{n+1} の共通部分の体積 v_n を求めよ。

(ii) $m = 1, 2, 3, \dots$ に対して、 $V_m = \sum_{n=1}^m v_n$ とおくと、 $V = \lim_{m \rightarrow \infty} V_m$ を求めよ。



第 6 問

赤球が一個と白球が三個入った容器 A と、ほかに赤球と白球の入った容器 B と C がある。

いま、A, B, C から無作為に一個ずつ合計三個の球を取り出し、これらからやはり無作為に一個をとって A にかえすという操作を繰り返す。

ただし容器 B から赤球が取り出される確率と白球が取り出される確率とは共に $\frac{1}{2}$ に保たれており、容器 C からはつねに赤球が取り出されるものとする。

- (i) 上記の操作を n 回くり返したとき、容器 A に x 個の赤球が入っている確率を $P_n(x)$, $n = 1, 2, 3, \dots$ で表せば、関係式

$$P_{n+1}(x) = \frac{1}{12}(6+x)P_n(x) + \frac{1}{24}(1+x)P_n(x+1) + \frac{1}{8}(5-x)P_n(x-1)$$

が成り立つことを証明せよ。ただし $x \leq -1$ または $x \geq 5$ のときは $P_n(x) = 0$ と定める。

- (ii) n 回目の操作を終えたとき A の中にある赤球の数の期待値 E_n を求めよ。

- (iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n$ を求めよ。