

入 学 試 験 問 題



数 学 (理科)

(配点 120 点)

1975 年度 試験時間 150 分

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、手を挙げて監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 2 枚の解答用紙が渡されますが、青色刷りの第 1 解答用紙には、第 1 問～第 3 問について、茶色刷りの第 2 解答用紙には、第 4 問～第 6 問について解答しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号（表面 2 箇所、裏面 1 箇所）、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外にこれらを記入してはいけません。
- 6 解答は、必ず解答用紙の指定された箇所に記入しなさい。
- 7 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。また、解答用紙の欄外の余白には、何も書いてはいけません。
- 8 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 9 解答用紙は、持ち帰ってはいけません。
- 10 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

第 1 問

三角形 ABC において, $BC = 32$, $CA = 36$, $AB = 25$ とする。この三角形の二辺の上に両端をもつ線分 PQ によって, この三角形の面積を二等分する。そのような PQ の長さが最短になる場合の, P と Q の位置を求めよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

第 2 問

k, l, m, n は負でない整数とする。0 でないすべての x に対して等式

$$\frac{(x+1)^k}{x^l} - 1 = \frac{(x+1)^m}{x^n}$$

を成り立たせるような k, l, m, n の組を求めよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

第 3 問

直線 $x + y = 4$ に第一象限において接する放物線 $y = -ax^2 + bx$ がある。この放物線と x 軸の正の部分とで囲まれる図形の面積が最大となるときの a, b の値とその場合の面積を求めよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

第 4 問

数列 $\{a_n\}$ の項が

$$a_1 = \sqrt{2}, \quad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

によって与えられているものとする。このとき $a_n = 2 \sin \theta_n$, $0 < \theta_n < \frac{\pi}{2}$ を満たす θ_n を見いだせ。また, $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n$ を求めよ。

計 算 用 紙

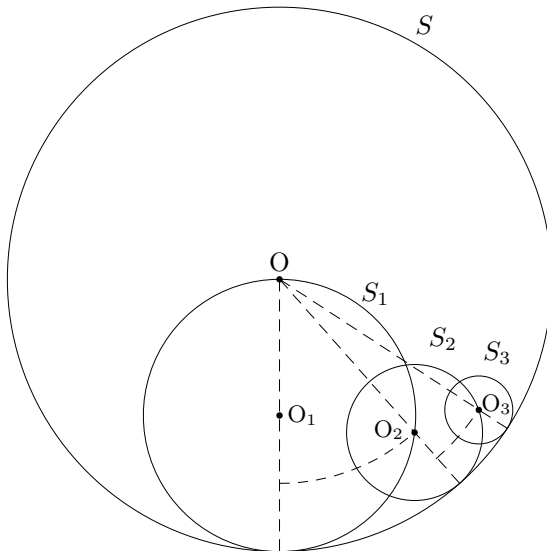
(切り離さないで用いよ。)

第 5 問

図のように球 S に内接する球の列 S_n , $n = 1, 2, 3, \dots$ がある。 S の中心 O と S_n の中心 O_n はすべて同一平面上にあり, O_{n+1} は S_n の表面上にあって, この平面上において O_{n+2} と O_n は直線 OO_{n+1} に関して互いに反対側にある。また S の半径は a , S_n の半径は $\frac{a}{2^n}$ である。このとき,

(i) S_n と S_{n+1} の共通部分の体積 v_n を求めよ。

(ii) $m = 1, 2, 3, \dots$ に対して, $V_m = \sum_{n=1}^m v_n$ とおくと, $V = \lim_{m \rightarrow \infty} V_m$ を求めよ。



計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

第 6 問

赤球が一個と白球が三個入った容器 A と、ほかに赤球と白球の入った容器 B と C がある。

いま、A, B, C から無作為に一個ずつ合計三個の球を取り出し、これらからやはり無作為に一個をとって A にかえすという操作を繰り返す。

ただし容器 B から赤球が取り出される確率と白球が取り出される確率とは共に $\frac{1}{2}$ に保たれており、容器 C からはつねに赤球が取り出されるものとする。

- (i) 上記の操作を n 回くり返したとき、容器 A に x 個の赤球が入っている確率を $P_n(x)$, $n = 1, 2, 3, \dots$ で表せば、関係式

$$P_{n+1}(x) = \frac{1}{12}(6+x)P_n(x) + \frac{1}{24}(1+x)P_n(x+1) + \frac{1}{8}(5-x)P_n(x-1)$$

が成り立つことを証明せよ。ただし $x \leq -1$ または $x \geq 5$ のときは $P_n(x) = 0$ と定める。

- (ii) n 回目の操作を終えたとき A の中にある赤球の数の期待値 E_n を求めよ。

- (iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n$ を求めよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

