

入学試験過去問題

数 学

東京大学（理科）

対象年度：1974年

試験時間：150分

問題数：6問

配点：120点

第 1 問

自然数 n , p に対し, n^p を十進法で書いたときの 1 の位の数を $f_p(n)$ で表す。ただし, 自然数とは, $1, 2, 3, \dots$ のことである。

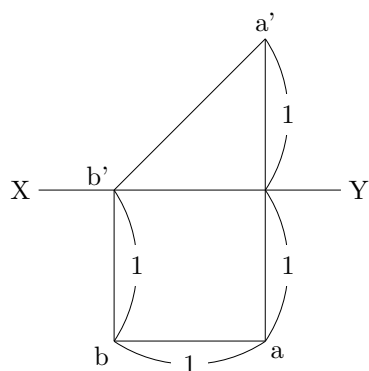
- (1) n が自然数の全体を動くとき, $f_2(n)$ の取る値を全部求めよ。
- (2) あらゆる自然数 n に対して, $f_5(n) = f_1(n)$ が成り立つことを証明せよ。
- (3) n が自然数の全体を動くとき, $f_{100}(n)$ の取る値を全部求めよ。

第 2 問

長さ l の線分が、その両端を放物線 $y = x^2$ の上にのせて動く。この線分の中点 M が x 軸にもっとも近い場合の M の座標を求めよ。ただし $l \geq 1$ とする。

第 3 問

下の図は線分 AB の投影図で、その各部の寸法は図に記入してあるとおりである。この線分の上端 A を通り、AB となす角が 60° 、平画面に対する傾きが 30° であるような直線の、平画面上の跡を C とする。点 B の平面図 b を原点とし、 ab を x 軸、 bb' を y 軸として、点 C の座標を求めよ。



第 4 問

二つの関数 $f(x)$, $g(x)$ が次の性質 1), 2), 3), 4)。

- 1) $f(x)$, $g(x)$ は $x = 0$ において微分可能。
- 2) $f(0) = g(0) = 0$ 。
- 3) 原点において, $y = f(x)$ および $y = g(x)$ のグラフに引いた接線はたがいに直交する。
- 4) 実数 a, b, c を適当にとると, $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax + bf(x)}{cx + f(x)}$, $g'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax + bg(x)}{cx + g(x)}$ が成り立つ。

このとき, a の値を求めよ。

第 5 問

原点 O に中心をもつ半径 2 の固定された円板を A とする。半径 1 の円板 B を、その中心 C が点 $(3, 0)$ に重なるように置くとき、点 $(4, 0)$ に重なる B の周上の点を M とする。 B を、 A の周囲に沿って滑らないようにころがして、 OC が x 軸の正の方向となす角が θ になったときの、 M の位置の座標を (X, Y) とする。

θ が 0 から $\frac{\pi}{2}$ まで動くとして、次の問に答えよ。

- (1) X と Y とを θ の関数として表せ。
- (2) Y の最大値を求めよ。
- (3) M の描く曲線の弧の長さを求めよ。

第 6 問

あるスポーツにおいて、A、B 二チームが試合をして、さきに三回勝った方を優勝とする。一回の試合で A が勝つ確率を p 、B が勝つ確率を q ($p + q = 1$, $p > 0$, $q > 0$) とする。このとき、A が優勝する確率を P 、B が優勝する確率を Q とし、また、優勝チームがきまるまでの試合数を N として、次の問に答えよ。

- (1) $p > q$ のとき、 $P - Q$ と $p - q$ はどちらが大きいか。
- (2) $P - p$ を最大にする p の値を求めよ。
- (3) N の期待値を最大にする p の値およびそのときの N の期待値を求めよ。