

入学試験過去問題

数 学

東京大学（理科）

対象年度：1973年

試験時間：150分

問題数：6問

配点：120点

第 1 問

S を中心 O 、半径 a の球面とし、 N を S 上の 1 点とする。点 O において線分 ON と $\frac{\pi}{3}$ の角度で交わるひとつの平面の上で、点 P が点 O を中心とする等速円運動をしている。その角速度は毎秒 $\frac{\pi}{12}$ であり、また $\overline{OP} = 4a$ である。点 N から点 P を観測するとき、 P は見えはじめてから何秒間見えつづけるか。また P が見えはじめた時点から見えなくなる時点までの、 $\overline{NP}$ の最大値および最小値を求めよ。ただし球面 S は不透明であるものとする。

第 2 問

$x_1, x_2, \dots, x_n$ はおのおの $0, 1, 2$ のどれかの値をとる。 $f_1 = \sum_{i=1}^n x_i, f_2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$

のとき $f_k = \sum_{i=1}^n x_i^k$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) を f_1 と f_2 を用いて表せ。

第 3 問

区間 $1 \leq x \leq 3$ において次のように定義された関数 $f(x)$ がある。

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (1 \leq x \leq 2). \\ x - 1 & (2 \leq x \leq 3). \end{cases}$$

いま実数 a に対して、区間 $1 \leq x \leq 3$ における関数 $f(x) - ax$ の最大値から最小値を引いた値を $V(a)$ とおく。このとき次の問に答えよ。

- (1) a がすべての実数にわたって動くとき、 $V(a)$ の最小値を求めよ。
- (2) $V(a)$ の最小値を与えるような a の値を求めよ。

第 4 問

平面上に 1 辺の長さが 1 の正方形 S がある。この平面上で S を平行移動して得られる正方形で、点 P を中心にもつものを $T(P)$ とする。このとき、共通部分 $S \cap T(P)$ の面積が $\frac{1}{2}$ 以上となるような点 P の存在範囲を図示せよ。またこの範囲の面積を求めよ。

第 5 問

t は 1 より大きい実数とする。 xy 平面上において, 不等式

(1) $0 < x$

(2) $\frac{t}{(1+t^2)x} \leq y \leq \frac{1}{1+x^2}$

を同時に満たす点 (x, y) 全体のつくる図形の面積を t の関数と考えて $f(t)$ とおく。 $f(t)$ の導関数 $f'(t)$ を求めよ。

第 6 問

x のある 2 次関数のグラフが、原点において直線 $y = x$ に接するという。このグラフ上の点 (u, v) における接線の傾きを u, v で表せ。ただし (u, v) は原点ではないとする。