

入学試験過去問題

数 学

東京大学（理科）

対象年度：1972年

試験時間：150分

問題数：6問

配点：120点

第 1 問

空間に座標系が定められていて、 z 軸上に 2 点 $A(0, 0, 6)$, $B(0, 0, 20)$ が与えられている。 xy 平面上の点 $P(x, y, 0)$ で、 $0 \leq x \leq 15$, $0 \leq y \leq 15$, $\angle APB \geq 30^\circ$ を満たすものの全体が作る図形の面積を求めよ。

第 2 問

平面上の三角形 ABC において、頂点 A を通り辺 AB , AC に垂直な直線をそれぞれ h , k とする。 B の k に関する対称点を B' , C の h に関する対称点を C' とする。ベクトル $\mathbf{b} = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{c} = \overrightarrow{AC}$, $\mathbf{b}' = \overrightarrow{AB'}$, $\mathbf{c}' = \overrightarrow{AC'}$ の間に $\mathbf{b}' = \mathbf{b} + \mathbf{c}$, $\mathbf{c}' = m\mathbf{b} + \mathbf{c}$ (m は正の整数), $|\mathbf{b}| = 1$ が成り立つとき, m , $\angle BAC$ および $|\mathbf{c}|$ を求めよ。ただし $|\mathbf{a}|$ はベクトル $\mathbf{a}$ の長さを表す。また $0 < \angle BAC < \pi$ とする。

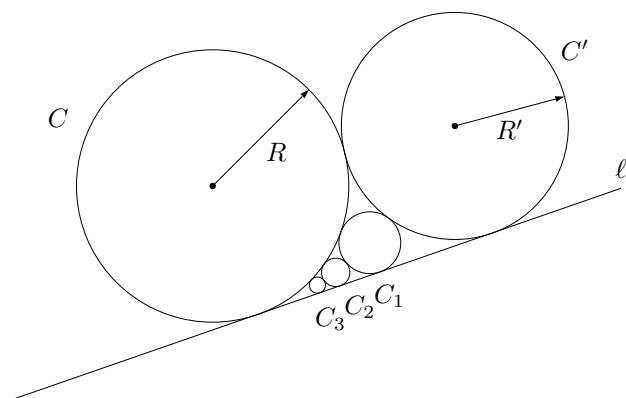
第 3 問

たがいに外接する定円 C , C' が共通接線 l の同じ側にあるとする。図のように

C , C' , l に接する円を C_1 , C , C_1 , l に接する円を C_2 , $\dots\dots$

C , C_{n-1} , l に接する円を C_n , $\dots\dots$

とする。このとき円 C_n の半径を r_n として、極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 r_n$ を、円 C の半径 R と円 C' の半径 R' とを用いて表せ。



第 4 問

k を実数の定数, $f(x) = x^2(x+8)$, $g(x) = (x^2-1)(x+4)$ とするとき, x に関する方程式 $f(x) - kg(x) = 0$ の相異なる実根の個数を求めよ。

第 5 問

$h(x)$ は $-\infty < x < \infty$ で 2 回微分可能なある関数で, $f(x)$ がどのような一次関数であつても, $u(x) = \int_0^x h(t)f(t) dt + h(x) \int_x^1 f(t) dt$ とおけば,

$$(1) \quad \frac{d^2 u}{dx^2} = f(x)$$

および

$$(2) \quad u(0) = 0$$

が成り立つ。このとき, $h(x)$ を求めよ。

第 6 問

図の長方形 ABP_1P_5 はある国境の町をあらわし、各線分は道路をあらわす。図の地点 $P_1, P_2, \dots, P_9$ には外国への通路が開かれている。いま、ある犯人が B から外国に向かって逃走しようとしているが、この犯人は P_j ($1 \leq j \leq 9$) 以外の各交差点 (B を含む) において、確率 $\frac{1}{2}$ ずつで真東または北東に通路をえらぶ。この犯人を捕まえるために 3 人の警官を P_j ($1 \leq j \leq 9$) のうちの適当な 3 地点に配置しようとする。どの 3 点に配置すれば、犯人を捕まえる確率 p が最大となるか。また、そのときの p の最大値を小数第 2 位まで求めよ。ただし、犯人は警官に出会わないで国境の地点に達すれば、無事に逃げおおせるものとする。

