

入 学 試 験 問 題



数 学 (理科)

(配点 120 点)

1971 年度 試験時間 150 分

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、手を挙げて監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 2 枚の解答用紙が渡されますが、青色刷りの第 1 解答用紙には、第 1 問～第 3 問について、茶色刷りの第 2 解答用紙には、第 4 問～第 6 問について解答しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号（表面 2 箇所、裏面 1 箇所）、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外にこれらを記入してはいけません。
- 6 解答は、必ず解答用紙の指定された箇所に記入しなさい。
- 7 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。また、解答用紙の欄外の余白には、何も書いてはいけません。
- 8 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 9 解答用紙は、持ち帰ってはいけません。
- 10 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

第 1 問

変数 t が 0 から π まで動くとき,

$$x = 2 \cos \left(t - \frac{\pi}{6} \right), \quad y = \cos \left(t + \frac{\pi}{3} \right)$$

によってあらわされる点 (x, y) と原点 $(0, 0)$ との間の距離の最大値, 最小値およびそれらをとる t の値を求めよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

第 2 問

正数 x を与えて,

$$2a_1 = x, \quad 2a_2 = a_1^2 + 1, \quad \dots\dots, \quad 2a_{n+1} = a_n^2 + 1, \quad \dots\dots$$

のように数列 $\{a_n\}$ を定めるとき,

- (1) $x \neq 2$ ならば, $a_1 < a_2 < \dots\dots < a_n < \dots\dots$ となることを証明せよ。
- (2) $x < 2$ ならば, $a_n < 1$ となることを証明せよ。このとき, 正数 ϵ を $1 - \frac{x}{2}$ より小となるようにとって, $a_1, a_2, \dots\dots, a_n$ までが $1 - \epsilon$ 以下となったとすれば, 個数 n について次の不等式が成り立つことを証明せよ。

$$2 - x > n\epsilon^2$$

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

第 3 問

与えられた実数係数の整式 $f(x)$ について

$$\int_0^1 f(x) dx = 2, \quad \int_0^1 xf(x) dx = 3$$

となるとする。そのとき,

$$\int_0^1 \{f(x) - ax - b\}^2 dx$$

の値を最小にする実数 a および b の値を求めよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

第 4 問

x の整式

$$f_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

について

$$f'_n(x) = f_{n-1}(x) \quad (n = 2, 3, \dots)$$

が成り立つことを証明せよ。

方程式 $f_n(x) = 0$ は、 n が奇数ならばただ 1 つの実根をもち、 n が偶数ならば実根をもたないことを数学的帰納法を用いて証明せよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

第 5 問

n を正の整数とし、 $\left(\cos \frac{2\pi}{n}k, \sin \frac{2\pi}{n}k\right)$ を座標とする点を Q_n であらわす。このとき、 n 個の点 $Q_0, Q_1, \dots, Q_{n-1}$ によって円周 $x^2 + y^2 = 1$ は n 等分される。

平面上の点 P の座標を (a, b) とし、

$$s_n = \frac{1}{n} \left(\overline{PQ_0}^2 + \overline{PQ_1}^2 + \dots + \overline{PQ_{n-1}}^2 \right)$$

とするとき、 $\lambda_P = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ の値を a, b をもちいてあらわせ。また、 P がどこにあれば λ_P の値は最小となるか。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

第 6 問

3人で‘ジャンケン’をして勝者をきめることにする。たとえば、1人が‘紙’を出し、他の2人が‘石’を出せば、ただ1回でちょうど1人の勝者がきまることになる。3人で‘ジャンケン’をして、負けた人は次の回に参加しないことにして、ちょうど1人の勝者がきまるまで‘ジャンケン’をくり返すことにする。このとき、 k 回目に、はじめてちょうど1人の勝者がきまる確率を求めよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

