

入学試験過去問題

数 学

東京大学（文科）

対象年度：2019年

試験時間：100分

問題数：4問

配点：80点

第 1 問

座標平面の原点を O とし, $O, A(1, 0), B(1, 1), C(0, 1)$ を辺の長さが 1 の正方形の頂点とする。3 点 $P(p, 0), Q(0, q), R(r, 1)$ はそれぞれ辺 OA, OB, BC 上にあり, 3 点 O, P, Q および 3 点 P, Q, R はどちらも面積が $\frac{1}{3}$ の三角形の 3 頂点であるとする。

- (1) q と r を p で表し, p, q, r それぞれのとりうる値の範囲を求めよ。
- (2) $\frac{CR}{OQ}$ の最大値, 最小値を求めよ。

第 2 問

O を原点とする座標平面において、点 A (2, 2) を通り、線分 OA と垂直な直線を l とする。座標平面上を点 P (p, q) が次の 2 つの条件をみたしながら動く。

$$\text{条件 1 : } 8 \leq \vec{OA} \cdot \vec{OP} \leq 17$$

$$\text{条件 2 : } \text{点 O と直線 } l \text{ との距離を } c \text{ とし、点 P } (p, q) \text{ と直線 } l \text{ の距離を } d \text{ とするとき}$$
$$cd \geq (p-1)^2$$

このとき、P が動く領域を D とする。さらに、 x 軸の正の部分と線分 OP のなす角を θ とする。

- (1) D を図示し、その面積を求めよ。
- (2) $\cos \theta$ のとりうる値の範囲を求めよ。

第 3 問

正八角形の頂点を反時計回りに A, B, C, D, E, F, G, H とする。また, 投げたとき表裏の出る確率がそれぞれ $\frac{1}{2}$ のコインがある。

点 P が最初に点 A にある。次の操作を 10 回繰り返す。

操作： コインを投げ, 表が出れば点 P を反時計回りに隣接する頂点に移動させ, 裏が出れば点 P を時計回りに隣接する頂点に移動させる。

例えば, 点 P が点 H にある状態で, 投げたコインの表が出れば点 A に移動させ, 裏が出れば点 G に移動させる。

以下の事象を考える。

事象 S : 操作を 10 回行った後に点 P が点 A にある。

事象 T : 1 回目から 10 回目の操作によって, 点 P は少なくとも 1 回, 点 F に移動する。

- (1) 事象 S が起こる確率を求めよ。
- (2) 事象 S と事象 T がともに起こる確率を求めよ。

第 4 問

O を原点とする座標平面を考える。不等式

$$|x| + |y| \leq 1$$

が表す領域を D とする。また、点 P, Q が領域 D を動くとき、 $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ}$ をみたす点 R が動く範囲を E とする。

(1) D, E をそれぞれ図示せよ。

(2) a, b を実数とし、不等式

$$|x - a| + |y - b| \leq 1$$

が表す領域を F とする。また、点 S, T が領域 F を動くとき、 $\overrightarrow{OU} = \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OT}$ をみたす点 U が動く範囲を G とする。 G は E と一致することを示せ。