

入学試験過去問題

数 学

東京大学（文科）

対象年度：2017年

試験時間：100分

問題数：4問

配点：80点

第 1 問

座標平面において 2 つの放物線 $A: y = s(x-1)^2$ と $B: y = -x^2 + t^2$ を考える。ただし s, t は実数で, $0 < s, 0 < t < 1$ をみたすとする。放物線 A と x 軸および y 軸で囲まれる領域の面積を P とし, 放物線 B の $x \geq 0$ の部分と x 軸および y 軸で囲まれる領域の面積を Q とする。 A と B がただ 1 点を共有するとき, $\frac{Q}{P}$ の最大値を求めよ。

第 2 問

1 辺の長さが 1 の正六角形 $ABCDEF$ が与えられている。点 P が辺 AB 上を、点 Q が辺 CD 上をそれぞれ独立に動くとき、線分 PQ を $2:1$ に内分する点 R が通りうる範囲の面積を求めよ。

第 3 問

座標平面上で x 座標と y 座標がいずれも整数である点を格子点という。格子点上を次の規則 (a), (b) に従って動く点 P を考える。

- (a) 最初に、点 P は原点 O にある。
 - (b) ある時刻で点 P が格子点 (m, n) にあるとき、その 1 秒後の点 P の位置は、隣接する格子点 $(m+1, n)$, $(m, n+1)$, $(m-1, n)$, $(m, n-1)$ のいずれかであり、また、これらの点に移動する確率は、それぞれ $\frac{1}{4}$ である。
- (1) 最初から 1 秒後の点 P の座標を (s, t) とする。 $t - s = -1$ となる確率を求めよ。
 - (2) 点 P が、最初から 6 秒後に直線 $y = x$ 上にある確率を求めよ。

第 4 問

$p = 2 + \sqrt{5}$ とおき, 自然数 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して

$$a_n = p^n + \left(-\frac{1}{p}\right)^n$$

と定める。以下の問いに答えよ。ただし設問 (1) は結論のみを書けばよい。

- (1) a_1, a_2 の値を求めよ。
- (2) $n \geq 2$ とする。積 $a_1 a_n$ を, a_{n+1} と a_{n-1} を用いて表せ。
- (3) a_n は自然数であることを示せ。
- (4) a_{n+1} と a_n の最大公約数を求めよ。