

入学試験過去問題

数 学

東京大学（文科）

対象年度：2016年

試験時間：100分

問題数：4問

配点：80点

第 1 問

座標平面上の 3 点 $P(x, y)$, $Q(-x, -y)$, $R(1, 0)$ が鋭角三角形をなすための (x, y) についての条件を求めよ。また, その条件をみたす点 $P(x, y)$ の範囲を図示せよ。

第 2 問

A, B, C の 3 つのチームが参加する野球の大会を開催する。以下の方式で試合を行い、2 連勝したチームが出た時点で、そのチームを優勝チームとして大会は終了する。

- (a) 1 試合目で A と B が対戦する。
- (b) 2 試合目で、1 試合目の勝者と、1 試合目で待機していた C が対戦する。
- (c) k 試合目で優勝チームが決まらない場合は、 k 試合目の勝者と、 k 試合目で待機していたチームが $k + 1$ 試合目で対戦する。ここで k は 2 以上の整数とする。

なお、すべての対戦において、それぞれのチームが勝つ確率は $\frac{1}{2}$ で、引き分けはないものとする。

- (1) ちょうど 5 試合目で A が優勝する確率を求めよ。
- (2) n を 2 以上の整数とする。ちょうど n 試合目で A が優勝する確率を求めよ。
- (3) m を正の整数とする。総試合数が $3m$ 以下で A が優勝する確率を求めよ。

第 3 問

座標平面上の 2 つの放物線

$$A: y = x^2$$

$$B: y = -x^2 + px + q$$

が点 $(-1, 1)$ で接している。ここで、 p と q は実数である。さらに、 t を正の実数とし、放物線 B を x 軸の正の向きに $2t$ 、 y 軸の正の向きに t だけ平行移動して得られる放物線を C とする。

- (1) p と q の値を求めよ。
- (2) 放物線 A と C が囲む領域の面積を $S(t)$ とする。ただし、 A と C が領域を囲まないときは $S(t) = 0$ と定める。 $S(t)$ を求めよ。
- (3) $t > 0$ における $S(t)$ の最大値を求めよ。

第 4 問

以下の問いに答えよ。ただし、(1)については、結論のみを書けばよい。

- (1) n を正の整数とし、 3^n を 10 で割った余りを a_n とする。 a_n を求めよ。
- (2) n を正の整数とし、 3^n を 4 で割った余りを b_n とする。 b_n を求めよ。
- (3) 数列 $\{x_n\}$ を次のように定める。

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = 3^{x_n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

x_{10} を 10 で割った余りを求めよ。