

入学試験過去問題

数 学

東京大学（文科）

対象年度：2015年

試験時間：100分

問題数：4問

配点：80点

## 第 1 問

以下の命題 A, B それぞれに対し, その真偽を述べよ。また, 真ならば証明を与え, 偽ならば反例を与えよ。

命題 A  $n$  が正の整数ならば,  $\frac{n^3}{26} + 100 \geq n^2$  が成り立つ。

命題 B 整数  $n, m, l$  が  $5n + 5m + 3l = 1$  をみたすならば,  $10nm + 3ml + 3nl < 0$  が成り立つ。

## 第 2 問

座標平面上の 2 点  $A(-1, 1)$ ,  $B(1, -1)$  を考える。また,  $P$  を座標平面上の点とし, その  $x$  座標の絶対値は 1 以下であるとする。次の条件 (i) または (ii) をみたす点  $P$  の範囲を図示し, その面積を求めよ。

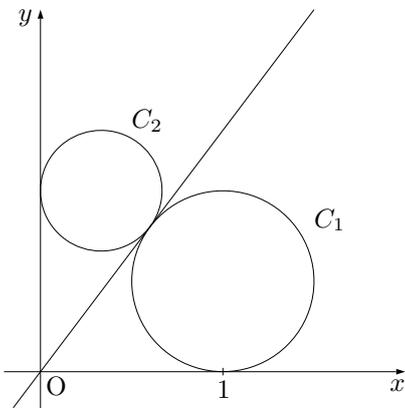
- (i) 頂点の  $x$  座標の絶対値が 1 以上の 2 次関数のグラフで, 点  $A, P, B$  をすべて通るものがある。
- (ii) 点  $A, P, B$  は同一直線上にある。

### 第 3 問

$l$  を座標平面上の原点を通り傾きが正の直線とする。さらに、以下の 3 条件 (i), (ii), (iii) で定まる円  $C_1, C_2$  を考える。

- (i) 円  $C_1, C_2$  は 2 つの不等式  $x \geq 0, y \geq 0$  で定まる領域に含まれる。
- (ii) 円  $C_1, C_2$  は直線  $l$  と同一点で接する。
- (iii) 円  $C_1$  は  $x$  軸と点  $(1, 0)$  で接し、円  $C_2$  は  $y$  軸と接する。

円  $C_1$  の半径を  $r_1$ , 円  $C_2$  の半径を  $r_2$  とする。 $8r_1 + 9r_2$  が最小となるような直線  $l$  の方程式と、その最小値を求めよ。



## 第 4 問

投げたとき表と裏の出る確率がそれぞれ  $\frac{1}{2}$  のコインを 1 枚用意し、次のように左から順に文字を書く。

コインを投げ、表が出たときは文字列  $AA$  を書き、裏が出たときは文字  $B$  を書く。さらに繰り返しコインを投げ、同じ規則に従って、 $AA$ ,  $B$  をすでにある文字列の右側につなげて書いていく。

たとえば、コインを 5 回投げ、その結果が順に 表, 裏, 裏, 表, 裏 であったとすると、得られる文字列は、

$AA B B A A B$

となる。このとき、左から 4 番目の文字は  $B$ , 5 番目の文字は  $A$  である。

- (1)  $n$  を正の整数とする。 $n$  回コインを投げ、文字列を作るとき、文字列の左から  $n$  番目の文字が  $A$  となる確率を求めよ。
- (2)  $n$  を 2 以上の整数とする。 $n$  回コインを投げ、文字列を作るとき、文字列の左から  $n - 1$  番目の文字が  $A$  で、かつ  $n$  番目の文字が  $B$  となる確率を求めよ。