

入 学 試 験 過 去 問 題

数 学

東京大学（文科）

対象年度： 2014 年

試験時間： 100 分

問題数： 4 問

配点： 80 点

第 1 問

以下の問いに答えよ。

- (1) t を実数の定数とする。実数全体を定義域とする関数 $f(x)$ を

$$f(x) = -2x^2 + 8tx - 12x + t^3 - 17t^2 + 39t - 18$$

と定める。このとき、関数 $f(x)$ の最大値を t を用いて表せ。

- (2) (1) の「関数 $f(x)$ の最大値」を $g(t)$ とする。 t が $t \geq -\frac{1}{\sqrt{2}}$ の範囲を動くとき、 $g(t)$ の最小値を求めよ。

第 2 問

a を自然数（すなわち 1 以上の整数）の定数とする。

白球と赤球があわせて 1 個以上入っている袋 U に対して、次の操作 $(*)$ を考える。

$(*)$ 袋 U から球を 1 個取り出し、

(i) 取り出した球が白球のときは、袋 U の中身が白球 a 個、赤球 1 個となるようにする。

(ii) 取り出した球が赤球のときは、その球を袋 U へ戻すことなく、袋 U の中身はそのままにする。

はじめに袋 U の中に、白球が $a + 2$ 個、赤球が 1 個入っているとする。この袋 U に対して操作 $(*)$ を繰り返し行う。

たとえば、1 回目の操作で白球が出たとすると、袋 U の中身は白球 a 個、赤球 1 個となり、さらに 2 回目の操作で赤球が出たとすると、袋 U の中身は白球 a 個のみとなる。

n 回目に取り出した球が赤球である確率を p_n とする。ただし、袋 U の中の個々の球の取り出される確率は等しいものとする。

(1) p_1, p_2 を求めよ。

(2) $n \geq 3$ に対して p_n を求めよ。

第 3 問

座標平面の原点を O で表す。

線分 $y = \sqrt{3}x$ ($0 \leq x \leq 2$) 上の点 P と、線分 $y = -\sqrt{3}x$ ($-3 \leq x \leq 0$) 上の点 Q が、線分 OP と線分 OQ の長さの和が 6 となるように動く。このとき、線分 PQ の通過する領域を D とする。

- (1) s を $-3 \leq s \leq 2$ をみたす実数とすると、点 (s, t) が D に入るような t の範囲を求めよ。
- (2) D を図示せよ。

第 4 問

r を 0 以上の整数とし、数列 $\{a_n\}$ を次のように定める。

$$a_1 = r, \quad a_2 = r + 1, \quad a_{n+2} = a_{n+1}(a_n + 1) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

また、素数 p を 1 つとり、 a_n を p で割った余りを b_n とする。ただし、0 を p で割った余りは 0 とする。

- (1) 自然数 n に対し、 b_{n+2} は $b_{n+1}(b_n + 1)$ を p で割った余りと一致することを示せ。
- (2) $r = 2$, $p = 17$ の場合に、10 以下のすべての自然数 n に対して、 b_n を求めよ。
- (3) ある 2 つの相異なる自然数 n, m に対して、

$$b_{n+1} = b_{m+1} > 0, \quad b_{n+2} = b_{m+2}$$

が成り立ったとする。このとき、 $b_n = b_m$ が成り立つことを示せ。