入 学 試 験 過 去 問 題

数　学

東京大学（文科）

対象年度： 2010 年

試験時間： 100 分

問題数： 4 問

配点： 80 点

第　1　問

O を原点とする座標平面上に点 A $(-3,\ 0)$ をとり，$0^\circ < \theta < 120^\circ$ の範囲にある θ に対して，次の条件 (i)，(ii) をみたす 2 点 B，C を考える。

(i)　B は $y > 0$ の部分にあり，$\mathrm{OB} = 2$ かつ $\angle \mathrm{AOB} = 180^\circ - \theta$ である。

(ii)　C は $y < 0$ の部分にあり，$\mathrm{OC} = 1$ かつ $\angle \mathrm{BOC} = 120^\circ$ である。ただし $\triangle \mathrm{ABC}$ は O を含むものとする。

以下の問 (1)，(2) に答えよ。

(1)　$\triangle \mathrm{OAB}$ と $\triangle \mathrm{OAC}$ の面積が等しいとき，θ の値を求めよ。

(2)　θ を $0^\circ < \theta < 120^\circ$ の範囲で動かすとき，$\triangle \mathrm{OAB}$ と $\triangle \mathrm{OAC}$ の面積の和の最大値と，そのときの $\sin\theta$ の値を求めよ。

第 2 問

2 次関数 $f(x) = x^2 + ax + b$ に対して

$$f(x+1) = c\int_0^1 (3x^2 + 4xt) f'(t)\,dt$$

が x についての恒等式になるような定数 a，b，c の組をすべて求めよ。

第 3 問

2 つの箱 L と R，ボール 30 個，コイン投げで表と裏が等確率 $\dfrac{1}{2}$ で出るコイン 1 枚を用意する。x を 0 以上 30 以下の整数とする。L に x 個，R に $30-x$ 個のボールを入れ，次の操作 (#) を繰り返す。

(#) 箱 L に入っているボールの個数を z とする。コインを投げ，表が出れば箱 R から箱 L に，裏が出れば箱 L から箱 R に，$K(z)$ 個のボールを移す。ただし，$0 \leqq z \leqq 15$ のとき $K(z)=z$，$16 \leqq z \leqq 30$ のとき $K(z)=30-z$ とする。

m 回の操作の後，箱 L のボールの個数が 30 である確率を $P_m(x)$ とする。たとえば $P_1(15)=P_2(15)=\dfrac{1}{2}$ となる。以下の問 (1)，(2) に答えよ。

(1) $m \geqq 2$ のとき，x に対してうまく y を選び，$P_m(x)$ を $P_{m-1}(y)$ で表せ。

(2) n を自然数とするとき，$P_{2n}(10)$ を求めよ。

第　4　問

C を半径 1 の円周とし，A を C 上の 1 点とする。3 点 P，Q，R が A を時刻 $t=0$ に出発し，C 上を各々一定の速さで，P，Q は反時計回りに，R は時計回りに，時刻 $t=2\pi$ まで動く。P，Q，R の速さは，それぞれ m，1，2 であるとする。（したがって，Q は C をちょうど一周する。）ただし，m は $1 \leqq m \leqq 10$ をみたす整数である。△PQR が PR を斜辺とする直角二等辺三角形となるような速さ m と時刻 t の組をすべて求めよ。