

入 学 試 験 過 去 問 題

数 学

東京大学（文科）

対象年度： 2003 年

試験時間： 100 分

問題数： 4 問

配点： 80 点

第 1 問

a, b, c を実数とし, $a \neq 0$ とする。

2 次関数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ が次の条件 (A), (B) を満たすとする。

(A) $f(-1) = -1, \quad f(1) = 1, \quad f'(1) \leq 6$

(B) $-1 \leq x \leq 1$ を満たすすべての x に対し,

$$f(x) \leq 3x^2 - 1$$

このとき, 積分 $I = \int_{-1}^1 (f'(x))^2 dx$ の値のとりうる範囲を求めよ。

第 2 問

a, b を実数とする。次の 4 つの不等式を同時に満たす点 (x, y) 全体からなる領域を D とする。

$$x + 3y \geq a$$

$$3x + y \geq b$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

領域 D における $x + y$ の最小値を求めよ。

第 3 問

2 次方程式 $x^2 - 4x - 1 = 0$ の 2 つの実数解のうち大きいものを α , 小さいものを β とする。

$n = 1, 2, 3, \dots$ に対し,

$$s_n = \alpha^n + \beta^n$$

とおく。

- (1) s_1, s_2, s_3 を求めよ。また, $n \geq 3$ に対し, s_n を s_{n-1} と s_{n-2} で表せ。
- (2) s_n は正の整数であることを示し, s_{2003} の 1 の位の数求めよ。
- (3) α^{2003} 以下の最大の整数の 1 の位の数求めよ。

第 4 問

さいころを振り、出た目の数で 17 を割った余りを X_1 とする。ただし、1 で割った余りは 0 である。

さらにさいころを振り、出た目の数で X_1 を割った余りを X_2 とする。以下同様にして、 X_n が決まればさいころを振り、出た目の数で X_n を割った余りを X_{n+1} とする。

このようにして、 X_n , $n = 1, 2, \dots$ を定める。

- (1) $X_3 = 0$ となる確率を求めよ。
- (2) 各 n に対し、 $X_n = 5$ となる確率を求めよ。
- (3) 各 n に対し、 $X_n = 1$ となる確率を求めよ。

注意：さいころは 1 から 6 までの目が等確率で出るものとする。