

入学試験過去問題

数 学

東京大学（文科）

対象年度：1998年

試験時間：100分

問題数：4問

配点：80点

第 1 問

a は 0 でない実数とする。関数

$$f(x) = (3x^2 - 4) \left(x - a + \frac{1}{a} \right)$$

の極大値と極小値の差が最小となる a の値を求めよ。

第 2 問

a, b は実数で、 $b \neq 0$ とする。 xy 平面に原点 $O(0, 0)$ および 2 点 $P(1, 0)$, $Q(a, b)$ をとる。

(1) $\triangle OPQ$ が鋭角三角形となるための a, b の条件を不等式で表し、点 (a, b) の範囲を ab 平面上に図示せよ。

(2) m, n を整数とする。 a, b が (1) で求めた条件をみたすとき、不等式

$$(m + na)^2 - (m + na) + n^2b^2 \geq 0$$

が成り立つことを示せ。

第 3 問

- (1) x は $0^\circ \leq x \leq 90^\circ$ をみたす角とする。

$$\begin{cases} \sin y = |\sin 4x| \\ \cos y = |\cos 4x| \\ 0^\circ \leq y \leq 90^\circ \end{cases}$$

となる y を x で表し, そのグラフを xy 平面上に図示せよ。

- (2) α は $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ をみたす角とする。 $0^\circ \leq \theta_n \leq 90^\circ$ をみたす角 $\theta_n, n = 1, 2, \dots$ を

$$\begin{cases} \theta_1 = \alpha \\ \sin \theta_{n+1} = |\sin 4\theta_n| \\ \cos \theta_{n+1} = |\cos 4\theta_n| \end{cases}$$

で定める。 k を 2 以上の整数として, $\theta_k = 0^\circ$ となる α の個数を k で表せ。

第 4 問

xyz 空間に 3 点 $A(1, 0, 0)$, $B(-1, 0, 0)$, $C(0, \sqrt{3}, 0)$ をとる。 $\triangle ABC$ を 1 つの面とし, $z \geq 0$ の部分に含まれる正四面体 $ABCD$ をとる。さらに $\triangle ABD$ を 1 つの面とし, 点 C と異なる点 E をもう 1 つの頂点とする正四面体 $ABDE$ をとる。

- (1) 点 E の座標を求めよ。
- (2) 正四面体 $ABDE$ の $y \leq 0$ の部分の体積を求めよ。