

入学試験過去問題

数 学

東京大学（文科）

対象年度：1997年

試験時間：100分

問題数：4問

配点：80点

第 1 問

a, b は実数で $a^2 + b^2 = 16$, $a^3 + b^3 = 44$ をみたしている。このとき,

- (1) $a + b$ の値を求めよ。
- (2) n を 2 以上の整数とすると、 $a^n + b^n$ は 4 で割り切れる整数であることを示せ。

第 2 問

a, b を正の数とし, xy 平面の 2 点 $A(a, 0)$ および $B(0, b)$ を頂点とする正 3 角形を ABC とする。ただし, C は第 1 象限の点とする。

(1) 3 角形 ABC が正方形

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$$

に含まれるような (a, b) の範囲を求めよ。

(2) (a, b) が (1) の範囲を動くとき, 3 角形 ABC の面積 S が最大となるような (a, b) を求めよ。また, そのときの S の値を求めよ。

第 3 問

r を正の数とする。 xyz 空間に原点 $O(0, 0, 0)$ と 3 点 $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$ をとる。

xyz 空間の点 P で条件

$$|\overrightarrow{PA}| = |\overrightarrow{PB}| = r|\overrightarrow{PO}|, \quad |\overrightarrow{PC}| = |\overrightarrow{PO}|$$

をみたすものが 2 つ存在するための r の条件を求めよ。さらに、この 2 点の座標を r を用いて表せ。

第 4 問

$0 \leq t \leq 1$ をみたす実数 t に対して、 xy 平面上の点 A, B を

$$A \left(\frac{2(t^2 + t + 1)}{3(t + 1)}, -2 \right), \quad B \left(\frac{2}{3}t, -2t \right)$$

と定める。 t が $0 \leq t \leq 1$ を動くとき、直線 AB の通りうる範囲を図示せよ。