

入学試験過去問題

数 学

東京大学（文科）

対象年度：1996 年

試験時間：100 分

問題数：4 問

配点：80 点

第 1 問

a を実数とする。行列 $X = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ が

$$X^2 - 2X + aE = O$$

をみたすような実数 x, y を求めよ。

ただし, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とする。

第 2 問

a, b, c, d を正の数とする。不等式

$$\begin{cases} s(1-a) - tb > 0 \\ -sc + t(1-d) > 0 \end{cases}$$

を同時にみたす正の数 s, t があるとき、2 次方程式

$$x^2 - (a+d)x + (ad-bc) = 0$$

は $-1 < x < 1$ の範囲に異なる 2 つの実数解をもつことを示せ。

第 3 問

xy 平面上の点 $P(a, b)$ に対し, 正方形 $S(P)$ を連立不等式

$$|x - a| \leq \frac{1}{2}, \quad |y - b| \leq \frac{1}{2}$$

の表す領域として定め, 原点と $S(P)$ の点との距離の最小値を $f(P)$ とする。点 $(2, 1)$ を中心とする半径 1 の円周上を点 P が動くとき, $f(P)$ の最大値を求めよ。

第 4 問

xyz 空間において、点 P を $(1, 0, 1)$ 、点 Q を $(a, a + 1, 0)$ とする。線分 PQ を z 軸のまわりに 1 回転して得られる曲面と平面 $z = 1$ および xy 平面で囲まれる部分の体積を $V(a)$ とおく。 a が実数全体を動くときの $V(a)$ の最小値およびそれを与える a の値を求めよ。