

入学試験過去問題

数 学

東京大学（文科）

対象年度：1995 年

試験時間：100 分

問題数：4 問

配点：80 点

第 1 問

すべての正の実数 x, y に対し

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} \leq k\sqrt{2x+y}$$

が成り立つような実数 k の最小値を求めよ。

第 2 問

自然数 k に対し, xy 平面上のベクトル

$$\vec{v_k} = \left(\cos \frac{k\pi}{4}, \sin \frac{k\pi}{4} \right)$$

を考える。 a, b を正の数とし, 平面上の点 $P_0, P_1, \dots, P_n$ を

$$P_0 = (0, 0)$$

$$\overrightarrow{P_{2n}P_{2n+1}} = a \overrightarrow{v_{2n+1}}, \quad n = 0, 1, 2, 3$$

$$\overrightarrow{P_{2n+1}P_{2n+2}} = b \overrightarrow{v_{2n+2}}, \quad n = 0, 1, 2, 3$$

により定める。このとき以下の問に答えよ。

- (1) $P_8 = P_0$ であることを示せ。
- (2) $P_0, P_1, \dots, P_8$ を順に結んで得られる 8 角形の面積 S を a, b を用いて表せ。
- (3) 面積 S が 7, 線分 P_0P_4 の長さが $\sqrt{10}$ のとき, a, b の値を求めよ。

第 3 問

xy 平面において、曲線 $y = -x^3 + ax$ 上の $x > 0$ の部分に、点 P を次の条件をみたすようにとる。ただし、 $a > 0$ とする。

点 P におけるこの曲線の接線と y 軸との交点を Q とするとき、原点 O における接線が $\angle QOP$ を二等分する。

このとき、 $\triangle QOP$ の面積 $S(a)$ の最小値と、それを与える a の値を求めよ。

第 4 問

半径 1cm の半球形の器が水平から角 θ だけ傾けて固定されている。ただし、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ とする。この器に毎秒 $\frac{\pi}{18}\text{cm}^3$ の割合で水を入れるとき、入れはじめてから $3 + \cos^2 \theta$ 秒後に器から水が流れだした。このときの θ の値を求めよ。