

入学試験過去問題

数 学

東京大学（文科）

対象年度：1998年

試験時間：100分

問題数：4問

配点：80点

第 1 問

xy 平面上で、次の条件を満たす点 (x, y) の範囲を D とする。

$$\log_2 x \leq 2 + \log_2 y \leq \log_2 x + \log_2(4 - 2x)$$

- (1) D を xy 平面上に図示せよ。
- (2) $s < 1$ のとき、 $y - sx$ の D 上での最大値 $f(s)$ を求め、関数 $t = f(s)$ のグラフを st 平面上に図示せよ。

第 2 問

xy 平面上の 2 点 P, Q に対し, P と Q を x 軸または y 軸に平行な線分からなる折れ線で結ぶときの経路の長さの最小値を $d(P, Q)$ で表す。

- (1) 原点 $O(0, 0)$ と点 $A(1, 3)$ に対し, $d(O, P) = d(P, A)$ を満たす点 $P(x, y)$ の範囲を xy 平面上に図示せよ。
- (2) 点 $A(1, 3)$ と点 $B(-1, 1)$ に対し, $d(A, P) = d(P, B)$ を満たす点 $P(x, y)$ の範囲を xy 平面上に図示せよ。

第 3 問

$0 < a \leq 1$ に対し、行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+2a \end{pmatrix}$ を考える。

$\vec{u} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$ のとき、ベクトル $A\vec{u}$ の長さ $|A\vec{u}|$ について、次の不等式が成り立つことを示せ。

$$(2 - \sqrt{2})a \leq |A\vec{u}| \leq 2 + \sqrt{2}$$

ただし、 $0 \leq \theta \leq 2\pi$ とする。

第 4 問

$0 < c < 1$ とする。3 次関数 $f(x) = -4x^3 + 3x^2$ に対し、

$$f_1(x) = f(x) + \int_0^c f(t) dt, \quad f_2(x) = f(x) + \int_0^c f_1(t) dt$$

とおく。以下、関数 $f_3(x)$, $f_4(x)$, $\dots\dots$ を順次

$$f_n(x) = f(x) + \int_0^c f_{n-1}(t) dt \quad (n = 3, 4, \dots\dots)$$

により定める。

- (1) 関数 $f_n(x)$ を求めよ。
- (2) $f_n(x)$ について、 $0 < x < 1$ のとき、 $f_n(x) = 0$ を満たす x がただひとつ存在することを示せ。