

入学試験過去問題

数 学

東京大学（文科）

対象年度：1993年

試験時間：100分

問題数：4問

配点：80点

第 1 問

3 次関数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ は極大値と極小値をもち、それらを区間 $-1 \leq x \leq 1$ 内でとるものとする。この条件を満たすような実数の組 (a, b) の範囲を ab 平面上に図示せよ。

第 2 問

整数からなる数列 $\{a_n\}$ を漸化式

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 3, \quad a_{n+2} = 3a_{n+1} - 7a_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

によって定める。 a_n が偶数となる n を決定せよ。

第 3 問

xyz 空間内の原点を中心とする半径 1 の球面

$$S = \{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, x, y, z \text{ は実数} \}$$

を考え, S 上の定点 $(0, 0, 1)$ を A とする。 A とことなる S 上の点 $P(x, y, z)$ に対し, 直線 AP と xy 平面の交点を $Q(u, v, 0)$ とする。

k を正の定数とし, 点 P が

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad x \geq \frac{1}{k}, \quad y \geq \frac{1}{k}, \quad z \geq \frac{1}{k}$$

を満たしながら動くとき, 対応する点 Q の動く範囲を uv 平面上に図示せよ。

第 4 問

$0 \leq t \leq 2$ の範囲にある t に対し，方程式

$$x^4 - 2x^2 - 1 + t = 0$$

の実数解のうち最大のものを $g_1(t)$ ，最小のものを $g_2(t)$ とおく。

$$\int_0^2 (g_1(t) - g_2(t)) dt$$

を求めよ。