

入学試験過去問題

数 学

東京大学（文科）

対象年度：1992年

試験時間：100分

問題数：4問

配点：80点

第 1 問

x についての方程式

$$px^2 + (p^2 - q)x - (2p - q - 1) = 0$$

が解をもち、すべての解の実部が負となるような実数の組 (p, q) の範囲を pq 平面上に図示せよ。

(注) 複素数 $a + bi$ (a, b は実数, i は虚数単位) に対し, a をこの複素数の実部という。

第 2 問

甲、乙二人が出資して共同事業を行う。二人の出資合計を s とするとき、この事業による利潤 $f(s)$ は

$$f(s) = \begin{cases} \frac{1}{4}s(s-3)^2 & (0 \leq s \leq 2) \\ -\frac{3}{4}s+2 & (s > 2) \end{cases}$$

で与えられ、利潤は出資額に応じて甲、乙に比例配分されるものとする。

甲の出資額 a が一定であるとして、乙の利潤配分額を最大にする s の値を求めよ。ただし、 $0 \leq a \leq 2$ とする。

第 3 問

$p_1 = 1, p_2 = 1, p_{n+2} = p_n + p_{n+1} \ (n \geq 1)$ によって定義される数列 $\{p_n\}$ をフィボナッチ数列といい、その一般項は

$$p_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right\}$$

で与えられる。必要ならばこの事実を用いて、次の問いに答えよ。

各桁の数字が 0 か 1 であるような自然数の列 $X_n \ (n = 1, 2, \dots)$ を次の規則により定める。

- (i) $X_1 = 1$
- (ii) X_n のある桁の数字 α が 0 ならば α を 1 で置き換え、 α が 1 ならば α を '10' で置き換える。 X_n の各桁ごとにこのような置き換えを行って得られる自然数を X_{n+1} とする。

たとえば、 $X_1 = 1, X_2 = 10, X_3 = 101, X_4 = 10110, X_5 = 10110101, \dots$ となる。

- (1) X_n の桁数 a_n を求めよ。
- (2) X_n の中に '01' という数字の配列が現れる回数 b_n を求めよ（たとえば $b_1 = 0, b_2 = 0, b_3 = 1, b_4 = 1, b_5 = 3, \dots$ ）。

第 4 問

xy 平面において、 x 座標、 y 座標ともに整数であるような点を格子点と呼ぶ。格子点を頂点に持つ三角形 ABC を考える。

- (1) 辺 AB , AC それぞれの上に両端を除いて奇数個の格子点があるとする、辺 BC 上にも両端を除いて奇数個の格子点があることを示せ。
- (2) 辺 AB , AC 上に両端を除いて丁度 3 点ずつ格子点が存在する、とすると、三角形 ABC の面積は 8 で割り切れる整数であることを示せ。