

入学試験過去問題

数 学

東京大学（文科）

対象年度：1989年

試験時間：100分

問題数：4問

配点：80点

第 1 問

$k > 0$ とする。 xy 平面上の二曲線

$$y = k(x - x^3), \quad x = k(y - y^3)$$

が第 1 象限に $\alpha \neq \beta$ なる交点 (α, β) をもつような k の範囲を求めよ。

第 2 問

$a > 0$ に対して次の二つの放物線を考える。

$$C_1: y = x^2 + \frac{1}{a^2}, \quad C_2: y = -(x - a)^2$$

- (1) C_1, C_2 の両方に接するような直線がつねに 2 本存在することを示せ。
- (2) (1) で定まる四つの接点を作る四角形の面積 $S(a)$ の最小値を求めよ。

第 3 問

虚部が正の複素数の全体を H とする。すなわち,

$$H = \{z = x + iy \mid x, y \text{ は実数で } y > 0\}$$

とする。以下 z を H に属する複素数とする。 q を正の実数とし,

$$f(z) = \frac{z+1-q}{z+1}$$

とおく。

(1) $f(z)$ もまた H に属することを示せ。

(2) $f_1(z) = f(z)$ と書き, 以下 $n = 2, 3, 4, \dots$ に対して

$$f_2(z) = f(f_1(z)), \quad f_3(z) = f(f_2(z)), \quad \dots, \quad f_n(z) = f(f_{n-1}(z)), \quad \dots$$

とおく。このとき, 各 n に対して

$$f_n(z) = \frac{r_n z + (1-q)s_n}{s_n z + r_n}, \quad r_n^2 - (1-q)s_n^2 = q^n$$

が成り立つような z によらない実数 r_n, s_n がとれることを示せ。

第 4 問

半径 r の円 O のまわりに一辺の長さ a の正三角形 ABC を円 O と同一平面内で次の二条件を満たしながら可能な限り移動させる。

(i) $\triangle ABC$ は円 O の内部と共有点を持たず、円 O の周とただ一点を共有する。

(ii) ベクトル $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ はそれぞれ一定に保たれる。

このとき、 $\triangle ABC$ の通過し得る範囲を図示して、その面積 S を求めよ。さらに、 $\triangle ABC$ の面積を T とするとき、 $r \rightarrow 0$ としたときの極限值 $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{S}{T}$ を求めよ。