

入 学 試 験 問 題



数 学（文科）

（配点 80 点）

1989 年度 試験時間 100 分

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、手を挙げて監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答用紙の指定欄に、受験番号（表面 2 箇所、裏面 1 箇所）、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外にこれらを記入してはいけません。
- 5 解答は、必ず解答用紙の指定された箇所に記入しなさい。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。また、解答用紙の欄外の余白には、何も書いてはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 解答用紙は、持ち帰ってはいけません。
- 9 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

第 1 問

$k > 0$ とする。 xy 平面上の二曲線

$$y = k(x - x^3), \quad x = k(y - y^3)$$

が第 1 象限に $\alpha \neq \beta$ なる交点 (α, β) をもつような k の範囲を求めよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

第 2 問

$a > 0$ に対して次の二つの放物線を考える。

$$C_1 : y = x^2 + \frac{1}{a^2}, \quad C_2 : y = -(x - a)^2$$

- (1) C_1, C_2 の両方に接するような直線がつねに 2 本存在することを示せ。
- (2) (1) で定まる四つの接点を作る四角形の面積 $S(a)$ の最小値を求めよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

第 3 問

虚部が正の複素数の全体を H とする。すなわち,

$$H = \{z = x + iy \mid x, y \text{ は実数で } y > 0\}$$

とする。以下 z を H に属する複素数とする。 q を正の実数とし,

$$f(z) = \frac{z + 1 - q}{z + 1}$$

とおく。

(1) $f(z)$ もまた H に属することを示せ。

(2) $f_1(z) = f(z)$ と書き, 以下 $n = 2, 3, 4, \dots$ に対して

$$f_2(z) = f(f_1(z)), \quad f_3(z) = f(f_2(z)), \quad \dots, \quad f_n(z) = f(f_{n-1}(z)), \quad \dots$$

とおく。このとき, 各 n に対して

$$f_n(z) = \frac{r_n z + (1 - q)s_n}{s_n z + r_n}, \quad r_n^2 - (1 - q)s_n^2 = q^n$$

が成り立つような z によらない実数 r_n, s_n がとれることを示せ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

第 4 問

半径 r の円 O のまわりに一辺の長さ a の正三角形 ABC を円 O と同一平面内で次の二条件を満たしながら可能な限り移動させる。

- (i) $\triangle ABC$ は円 O の内部と共有点を持たず、円 O の周とただ一点を共有する。
- (ii) ベクトル $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ はそれぞれ一定に保たれる。

このとき、 $\triangle ABC$ の通過し得る範囲を図示して、その面積 S を求めよ。さらに、 $\triangle ABC$ の面積を T とするとき、 $r \rightarrow 0$ としたときの極限值 $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{S}{T}$ を求めよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

