

入学試験過去問題

数 学

東京大学（文科）

対象年度：1987年

試験時間：100分

問題数：4問

配点：80点

第 1 問

行列 $X = \begin{pmatrix} x & z \\ z & y \end{pmatrix}$ が条件

$$X^2 - 4X + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

をみたすとき、このような x, y を座標とする点 (x, y) が存在する範囲を図示せよ。ただし、行列の成分は実数とする。

第 2 問

a を正の定数とし、 x の関数 $f(x) = x^3 - ax^2 - a^2x$ のグラフを C とする。 $f(x)$ が極大となる x の値を b とするとき、点 $(b, f(b))$ における C の接線と C とによって囲まれる部分の面積を a で表せ。

第 3 問

t の関数 $f(t)$ を $f(t) = 1 + 2at + b(2t^2 - 1)$ とおく。

区間 $-1 \leq t \leq 1$ のすべての t に対して $f(t) \geq 0$ であるような a, b を座標とする点 (a, b) の存在する範囲を図示せよ。

第 4 問

三つの実数 x, y, z のうち最大の数を $\max(x, y, z)$ で表し、最小の数を $\min(x, y, z)$ で表す。いま、次の条件をみたす x, y, z を座標とする点全体の集合を R とする。

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0$$

$$\max(x, y, z) \leq a$$

$$x + y + z - \min(x, y, z) \leq a + b$$

R の体積を求めよ。ただし、 a, b は定数で、 $a > b > 0$ とする。