

入学試験過去問題

数 学

東京大学（文科）

対象年度：1986 年

試験時間：100 分

問題数：4 問

配点：80 点

第 1 問

x が $0 \leq x \leq 3$ という範囲を動くときの、関数

$$f(x) = 2x^2 - 4ax + a + a^2$$

の最小値 m が 0 となるような、定数 a の値をすべて求めよ。

第 2 問

四点 A, B, C, D を頂点とする四面体 T において, 各辺の長さが

$$AB = x, \quad AC = AD = BC = BD = 5, \quad CD = 4$$

であるとき, T の体積 V を求めよ。またこのような四面体が存在するような x の範囲を求めよ。またこの範囲で x を動かしたときの体積 V の最大値を求めよ。

第 3 問

三次またはそれ以下の任意の整式 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ に対して, 常に

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = uf(s) + vf(t)$$

が成り立つような定数 u, v, s, t を求めよ。ただし $s < t$ とする。

第 4 問

平面 S の一点 A と正数 α ($\alpha < 180$) をとる。点の集合としての S から S への写像 φ が、次の三つの条件 (i), (ii), (iii) をみたすとき、 φ は A を中心とする正の向き α° の回転と呼ばれる。

- (i) $\varphi(A) = A$,
- (ii) S の任意の点 P ($\neq A$) に対し、 $AP = A\varphi(P)$, $\angle PA\varphi(P) = \alpha^\circ$,
- (iii) 人が三角形 $P\varphi(P)A$ の周を一周し、 P , $\varphi(P)$, A の順序に頂点を通るとき、三角形の内部は常に人の左側にある。

いま S 上に相異なる二点 A , B をとり、 A を中心とする正の向き 60° の回転を f , B を中心とする正の向き 60° の回転を g とする。これに対し、 f と g の合成写像 $h = g \circ f$ が、 $h(P) = g(f(P))$ によって定義される。

- (1) このとき、点 $h(A)$ と $h(B)$ は、 A , B に対して、どのような位置にあるかを求め、図示せよ。
- (2) h はある点 O を中心とする正の向き α° の回転であることを示し、点 O および回転角 α を求めよ。

