

入学試験過去問題

数 学

東京大学（文科）

対象年度：1979年

試験時間：100分

問題数：4問

配点：80点

第 1 問

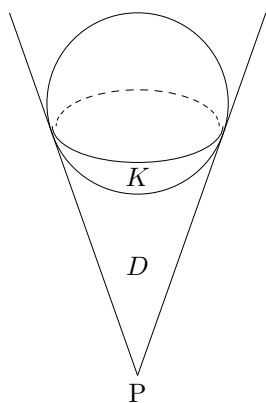
xy 平面上の 4 点 A (0, 0), B (1, 0), C (1, 1), D (0, 1) を頂点とする正方形を Q とする。

実数 t に対して一次変換 $U_t = \begin{pmatrix} 1+t & t+t^2 \\ 0 & 1+t \end{pmatrix}$, $V_t = \begin{pmatrix} 1+t & 0 \\ t+t^2 & 1+t \end{pmatrix}$ を考え, Q が U_t によって写された図形と, Q が V_t によって写された図形との共通部分の面積を $S(t)$ とする。 t が $t \geq 0$ の範囲を動くとき, t の関数 $S(t)$ のグラフの概形を描き, $S(t)$ のこの範囲での最大値を求めよ。

第 2 問

図のように、半径 1 の球が、ある円錐の内部にはめこまれる形で接しているとする。球と円錐面が接する点の全体は円をなすが、その円を含む平面を α とする。

円錐の頂点を P とし、 α に関して P と同じ側にある球の部分を K とする。また、 α に関して P と同じ側にある球面の部分および円錐面の部分で囲まれる立体を D とする。いま、 D の体積が球の体積の半分に等しいという。そのときの K の体積を求めよ。



第 3 問

ある硬貨を投げるとき、表と裏がおのこの確率 $\frac{1}{2}$ で出るものとする。

この硬貨を 8 回くり返して投げ、 n 回目に表が出れば $X_n = 1$ 、裏が出れば $X_n = -1$ とし、 $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ ($1 \leq n \leq 8$) とおく。

このとき次の確率を求めよ。

(1) $S_n \neq 0$ かつ $S_8 = 2$ となる確率。

(2) $S_4 = 0$ かつ $S_8 = 2$ となる確率。

第 4 問

a を正の整数とし、数列 $\{u_n\}$ を次のように定める。

$$u_1 = 2, \quad u_2 = a^2 + 2, \quad u_n = au_{n-2} - u_{n-1}, \quad n = 3, 4, 5, \dots$$

このとき、数列 $\{u_n\}$ の項に 4 の倍数が現れないために、 a のみたすべき必要十分条件を求めよ。