

入学試験過去問題

数 学

東京大学（文科）

対象年度：1977年

試験時間：100分

問題数：6問

配点：80点

- 第2(A)問と第2(B)問から1問を選択して解答
- 第4(A)問と第4(B)問から1問を選択して解答

第 1 問

k を実数の定数とすると、 x の関数 $f(x) = |x^3 - 3kx|$ が $-1 \leq x \leq 1$ の範囲でとる最大値を $M(k)$ で表す。 k が実数全体を動くとき、 $M(k)$ が最小となる k の値および $M(k)$ の最小値を求めよ。

第 2 (A) 問

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$, $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = J$ と書く。行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と実数 t に対し

$$A(I - tJ) = I + tJ$$

という関係が成り立つとき、 a, b, c, d を t の式で表せ。

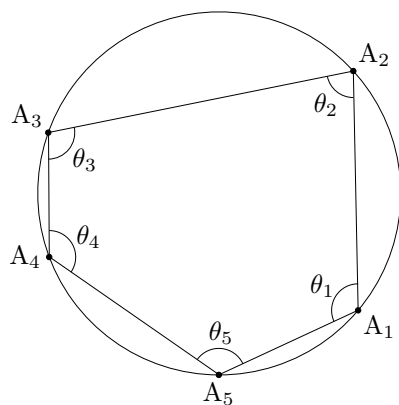
また t が実数全体を動くとき、関係 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ で定まる点 (x, y) が動いてできる図形を求め、これを図示せよ。

第 2 (B) 問

$\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5$ を正の数とする。図のように円に内接する 5 角形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ で、 $1 \leq i \leq 5$ に対し角 A_i の大きさが θ_i となるものが存在するためには、

$$\begin{aligned} \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 &= 3\pi, & \theta_1 + \theta_3 &> \pi, & \theta_2 + \theta_4 &> \pi, \\ \theta_3 + \theta_5 &> \pi, & \theta_1 + \theta_4 &> \pi, & \theta_2 + \theta_5 &> \pi \end{aligned}$$

が同時に成り立つことが必要かつ十分であることを証明せよ。



第 3 問

xy 平面上に、不等式で表される 3 つの領域 $A: x \geq 0$, $B: y \geq 0$, $C: \sqrt{3}x + y \leq \sqrt{3}$ をとる。いま任意の点 P に対し、 P を中心として A , B , C のどれか少なくとも 1 つに含まれる円を考える。

このような円の半径の最大値は点 P によって定まるから、これを $r(P)$ で表すことにする。

- i) 点 P が $A \cap C$ から $(A \cap C) \cap B$ を除いた部分を動くとき、 $r(P)$ の動く範囲を求めよ。
- ii) 点 P が平面全体を動くとき、 $r(P)$ の動く範囲を求めよ。

第 4 (A) 問

座標の定められた空間において、直線 l は 2 点 $(1, 1, 0)$, $(2, 1, 1)$ を通り、直線 m は 2 点 $(1, 1, 1)$, $(1, 3, 2)$ を通る。

- i) l を含み m に平行な平面の方程式を $ax + by + cz + d = 0$ の形に表せ。
- ii) 点 $(2, 0, 1)$ を通り、 l , m の両方と交わる直線を n とする。 l と n の交点および m と n の交点を求めよ。

第 4 (B) 問

a を実数の定数とすると、

$$a \cos 2\theta - 4(a - 2) \cos \theta - a + 4 = 0$$

をみたす相異なる θ は、 $0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲にいくつあるか。