

入 学 試 験 問 題



数 学 (文科)

(配点 80 点)

1976 年度 試験時間 100 分

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、手を挙げて監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答用紙の指定欄に、受験番号（表面 2 箇所、裏面 1 箇所）、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外にこれらを記入してはいけません。
- 5 解答は、必ず解答用紙の指定された箇所に記入しなさい。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。また、解答用紙の欄外の余白には、何も書いてはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 解答用紙は、持ち帰ってはいけません。
- 9 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

第 1 問

負でない実数 r, l に対して, xy 平面上の曲線

$$y = \begin{cases} x^2 & (0 \leq x \leq r) \\ r^2 & (r \leq x \leq l+r) \\ (x-l-2r)^2 & (l+r \leq x \leq l+2r) \end{cases}$$

を考え, これを x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積を V とする。 r^2 と l の和が正の定数 c になるように r と l を変化させるとき, V の最大値を与えるような r と l の値を求めよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

第 2 問

時刻 $t = 0$ に原点を出発し、 xy 平面上で次の条件 (i), (ii) に従っていろいろに運動する動点 P がある。

- (i) $t = 0$ における P の速度を表すベクトルの成分は $(1, \sqrt{3})$ である。
- (ii) $0 < t < 1$ において、 P は何回か (1 回以上有限回) 直角に左折するが、そのときを除けば P は一定の速さ 2 で直進する。(ただし、左折するのに要する時間は 0 とする。)

このとき、時刻 $t = 1$ において P が到達する点を Q として、 Q の存在しうる範囲を図示せよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

第 3 問

(A), (B) から 1 つ選んで解答せよ。

(A)

点 $P(x, y)$ は xy 平面上の円 $C: (x-5)^2 + (y-5)^2 = r^2$ ($r > 0$) の上を動く動点である。このとき点 P の点 $A(9, 0)$ に関する対称点を Q とし、また点 P を原点 O のまわりに正の向きに $\frac{\pi}{2}$ だけ回転した点を R とする。点 P が円 C の上を動くときの線分 QR の長さの最小値 $f(r)$ と最大値 $g(r)$ を求めよ。また $f(r)$ が 0 となるような r の値を求めよ。

(B)

xy 平面上に 3 つの円 A, B, C があって、それぞれ

$$A: x^2 + y^2 = 9, \quad B: (x-4)^2 + (y-3)^2 = 4, \quad C: (x-5)^2 + (y+3)^2 = 1$$

で表される。この平面上の点 P から円 A, B, C に接線が引けるとき、 P からそれらの接点までの距離をそれぞれ $\alpha(P), \beta(P), \gamma(P)$ とする。このとき

$$\alpha(P)^2 + \beta(P)^2 + \gamma(P)^2 = 99$$

となる点 P の全体が作る曲線を図示し、その長さを求めよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

第 4 問

(A), (B) から 1 つ選んで解答せよ。

(A)

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$ とおく。実数 a, b に対し $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$ とおく。いま $xI + yA$ (x, y は実数) の形に表される行列全体からなる集合を R とし, R から O を除いた集合を G とする。

- (i) R に属する任意の 2 つの行列の積は R に属することを示せ。
- (ii) G に属する任意の行列が逆行列をもつとき, 点 (a, b) はどのような範囲にあるか。これを図示せよ。

(B)

a を整数とする。整式 $f(x) = x^5 - ax - 1$ が整数を係数とする 2 つの (正の次数の) 整式の積に表されるような a を求めよ。またそのような a について $f(x)$ を上のような積に分解せよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

