

入学試験過去問題

数 学

東京大学（文科）

対象年度：1974年

試験時間：100分

問題数：4問

配点：80点

第 1 問

自然数 n , p に対し, n^p を十進法で書いたときの 1 の位の数を $f_p(n)$ で表す。ただし, 自然数とは, $1, 2, 3, \dots$ のことである。

- (1) n が自然数の全体を動くとき, $f_2(n)$ の取る値を全部求めよ。
- (2) あらゆる自然数 n に対して, $f_5(n) = f_1(n)$ が成り立つことを証明せよ。
- (3) n が自然数の全体を動くとき, $f_{100}(n)$ の取る値を全部求めよ。

第 2 問

長さ l の線分が、その両端を放物線 $y = x^2$ の上にのせて動く。この線分の中点 M が x 軸にもっとも近い場合の M の座標を求めよ。ただし $l \geq 1$ とする。

第 3 問

半径 a の球から、鉛直で球の中心を通る軸をもつ円柱状の部分をくり抜き、残った環状部分の高さが $2h$ になるようにする。この環状部分の体積を求めよ。ただし、 $a > h$ とする。

第 4 問

$\alpha > 0$ とし, xy 平面上において, 不等式

$$y \leq \frac{-1}{\alpha^2}x^2 + \frac{2\alpha-1}{\alpha^2}x - 1 + \frac{1}{\alpha}$$

をみたす点 (x, y) 全体からなる集合を A とする。 A と第一象限との共通部分を B とするとき, B の面積を α の関数として表し, そのグラフを描け。