

入学試験過去問題

数 学

東京大学（文科）

対象年度：1972年

試験時間：100分

問題数：4問

配点：80点

第 1 問

空間に座標系が定められていて、 z 軸上に 2 点 $A(0, 0, 6)$, $B(0, 0, 20)$ が与えられている。 xy 平面上の点 $P(x, y, 0)$ で、 $0 \leq x \leq 15$, $0 \leq y \leq 15$, $\angle APB \geq 30^\circ$ を満たすものの全体が作る図形の面積を求めよ。

第 2 問

平面上の三角形 ABC において、頂点 A を通り辺 AB , AC に垂直な直線をそれぞれ h , k とする。 B の k に関する対称点を B' , C の h に関する対称点を C' とする。ベクトル $\mathbf{b} = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{c} = \overrightarrow{AC}$, $\mathbf{b}' = \overrightarrow{AB'}$, $\mathbf{c}' = \overrightarrow{AC'}$ の間に $\mathbf{b}' = \mathbf{b} + \mathbf{c}$, $\mathbf{c}' = m\mathbf{b} + \mathbf{c}$ (m は正の整数), $|\mathbf{b}| = 1$ が成り立つとき, m , $\angle BAC$ および $|\mathbf{c}|$ を求めよ。ただし $|\mathbf{a}|$ はベクトル $\mathbf{a}$ の長さを表す。また $0 < \angle BAC < \pi$ とする。

第 3 問

複素数 z, w の間に $w = z^2$ なる関係があり、複素平面において点 z は四点 $1+i, 2+i, 2+2i, 1+2i$ を頂点とする正方形の内部を動くものとする。このとき、複素平面において、点 w の動く範囲の面積を求めよ。ただし、 i は虚数単位をあらわす。

第 4 問

たがいに外接する定円 C , C' が共通接線 l の同じ側にあるとする。図のように

C , C' , l に接する円を C_1 , C , C_1 , l に接する円を C_2 , $\dots\dots$

C , C_{n-1} , l に接する円を C_n , $\dots\dots$

とする。このとき円 C_n の半径を r_n として、極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 r_n$ を、円 C の半径 R と円 C' の半径 R' とを用いて表せ。

