

## 東京大学（理科） 2025 年 第 5 問

$n$  を 2 以上の整数とする。1 から  $n$  までの数字が書かれた札が各 1 枚ずつ合計  $n$  枚あり、横一列におかれている。1 以上  $(n-1)$  以下の整数  $i$  に対して、次の操作  $(T_i)$  を考える。

$(T_i)$  左から  $i$  番目の札の数字が、左から  $(i+1)$  番目の札の数字よりも大きければ、これら 2 枚の札の位置を入れかえる。そうでなければ、札の位置をかえない。

最初の状態において札の数字は左から  $A_1, A_2, \dots, A_n$  であったとする。この状態から  $(n-1)$  回の操作  $(T_1), (T_2), \dots, (T_{n-1})$  を順に行った後、続けて  $(n-1)$  回の操作  $(T_{n-1}), \dots, (T_2), (T_1)$  を順に行ったところ、札の数字は左から  $1, 2, \dots, n$  と小さい順に並んだ。以下の問いに答えよ。

- (1)  $A_1$  と  $A_2$  のうち少なくとも一方は 2 以下であることを示せ。
- (2) 最初の状態としてありうる札の数字の並び方  $A_1, A_2, \dots, A_n$  の総数を  $c_n$  とする。 $n$  が 4 以上の整数であるとき、 $c_n$  を  $c_{n-1}$  と  $c_{n-2}$  を用いて表せ。