

東京大学（理科） 2023 年 第 6 問

O を原点とする座標空間において、不等式 $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$, $|z| \leq 1$ の表す立方体を考える。その立方体の表面のうち、 $z < 1$ を満たす部分を S とする。

以下、座標空間内の 2 点 A, B が一致するとき、線分 AB は点 A を表すものとし、その長さを 0 と定める。

- (1) 座標空間内の点 P が次の条件 (i), (ii) をともに満たすとき、点 P が動きうる範囲 V の体積を求めよ。

(i) $OP \leq \sqrt{3}$

(ii) 線分 OP と S は、共有点を持たないか、点 P のみを共有点に持つ。

- (2) 座標空間内の点 N と点 P が次の条件 (iii), (iv), (v) をすべて満たすとき、点 P が動きうる範囲 W の体積を求めよ。必要ならば、 $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ を満たす実数 α $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$ を用いてよい。

(iii) $ON + NP \leq \sqrt{3}$

(iv) 線分 ON と S は共有点を持たない。

(v) 線分 NP と S は、共有点を持たないか、点 P のみを共有点に持つ。