

東京大学（理科） 2023 年 第 4 問

座標空間内の 4 点 $O(0, 0, 0)$, $A(2, 0, 0)$, $B(1, 1, 1)$, $C(1, 2, 3)$ を考える。

- (1) $\overrightarrow{OP} \perp \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OP} \perp \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OC} = 1$ を満たす点 P の座標を求めよ。
- (2) 点 P から直線 AB に垂線を下ろし、その垂線と直線 AB の交点を H とする。 $\overrightarrow{OH}$ を $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ を用いて表せ。
- (3) 点 Q を $\overrightarrow{OQ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OP}$ により定め、 Q を中心とする半径 r の球面 S を考える。 S が三角形 OHB と共有点を持つような r の範囲を求めよ。ただし、三角形 OHB は 3 点 O, H, B を含む平面上にあり、周とその内部からなるものとする。