

東京大学 (理科) 2022 年 第 3 問

O を原点とする座標平面上で考える。座標平面上の 2 点 $S(x_1, y_1)$, $T(x_2, y_2)$ に対し、点 S が点 T から十分離れているとは、

$$|x_1 - x_2| \geq 1 \quad \text{または} \quad |y_1 - y_2| \geq 1$$

が成り立つことと定義する。

不等式

$$0 \leq x \leq 3, \quad 0 \leq y \leq 3$$

が表す正方形の領域を D とし、その 2 つの頂点 $A(3, 0)$, $B(3, 3)$ を考える。さらに、次の条件 (i), (ii) をともに満たす点 P をとる。

(i) 点 P は領域 D の点であり、かつ、放物線 $y = x^2$ 上にある。

(ii) 点 P は、3 点 O, A, B のいずれからも十分離れている。

点 P の x 座標を a とする。

(1) a のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) 次の条件 (iii), (iv) をともに満たす点 Q が存在しうる範囲の面積 $f(a)$ を求めよ。

(iii) 点 Q は領域 D の点である。

(iv) 点 Q は、4 点 O, A, B, P のいずれからも十分離れている。

(3) a は (1) で求めた範囲を動くとする。(2) の $f(a)$ を最小にする a の値を求めよ。