

東京大学 (理科) 2014 年 第 4 問

p, q は実数の定数で, $0 < p < 1, q > 0$ をみたすとする。関数

$$f(x) = (1-p)x + (1-x)(1-e^{-qx})$$

を考える。

以下の問いに答えよ。必要であれば, 不等式 $1+x \leq e^x$ がすべての実数 x に対して成り立つことを証明なしに用いてよい。

(1) $0 < x < 1$ のとき, $0 < f(x) < 1$ であることを示せ。

(2) x_0 は $0 < x_0 < 1$ をみたす実数とする。数列 $\{x_n\}$ の各項 x_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) を,

$$x_n = f(x_{n-1})$$

によって順次定める。 $p > q$ であるとき,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$$

となることを示せ。

(3) $p < q$ であるとき,

$$c = f(c), \quad 0 < c < 1$$

をみたす実数 c が存在することを示せ。