

2×2 行列 $P = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ に対して

$$\mathrm{Tr}(P) = p + s$$

と定める。

a, b, c は $a \geq b > 0$, $0 \leq c \leq 1$ を満たす実数とする。行列 A, B, C, D を次で定める。

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} a^c & 0 \\ 0 & b^c \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} b^{1-c} & 0 \\ 0 & a^{1-c} \end{pmatrix}$$

また実数 x に対し $U(x) = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$ とする。

このとき以下の問いに答えよ。

- (1) 各実数 t に対して, x の関数

$$f(x) = \mathrm{Tr} \left(\left(U(t)AU(-t) - B \right) U(x) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} U(-x) \right)$$

の最大値 $m(t)$ を求めよ。(ただし, 最大値をとる x を求める必要はない。)

- (2) すべての実数 t に対し

$$2 \mathrm{Tr}(U(t)CU(-t)D) \geq \mathrm{Tr}(U(t)AU(-t) + B) - m(t)$$

が成り立つことを示せ。