

東京大学（理科） 2012 年 第 5 問

行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が次の条件 (D) を満たすとする。

(D) A の成分 a, b, c, d は整数である。また、平面上の 4 点 $(0, 0), (a, b), (a+c, b+d), (c, d)$ は、面積 1 の平行四辺形の 4 つの頂点をなす。

$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおく。次の問いに答えよ。

- (1) 行列 BA と $B^{-1}A$ も条件 (D) を満たすことを示せ。
- (2) $c = 0$ ならば、 A に B, B^{-1} のどちらかを左から次々にかけることにより、4 個の行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ のどれかにできることを示せ。
- (3) $|a| \geq |c| > 0$ とする。 $BA, B^{-1}A$ の少なくともどちらか一方は、それを $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ とすると

$$|x| + |z| < |a| + |c|$$

を満たすことを示せ。