

平面上の 2 点 P, Q の距離を $d(P, Q)$ と表すことにする。平面上に点 O を中心とする一辺の長さが 1000 の正三角形 $\triangle A_1A_2A_3$ がある。 $\triangle A_1A_2A_3$ の内部に 3 点 B_1, B_2, B_3 を、 $d(A_n, B_n) = 1$ ($n = 1, 2, 3$) となるようにとる。また、

$$\begin{aligned}\vec{a_1} &= \vec{A_1A_2}, & \vec{a_2} &= \vec{A_2A_3}, & \vec{a_3} &= \vec{A_3A_1} \\ \vec{e_1} &= \vec{A_1B_1}, & \vec{e_2} &= \vec{A_2B_2}, & \vec{e_3} &= \vec{A_3B_3}\end{aligned}$$

とおく。 $n = 1, 2, 3$ のそれぞれに対して、時刻 0 に A_n を出発し、 $\vec{e_n}$ の向きに速さ 1 で直進する点を考え、時刻 t におけるその位置を $P_n(t)$ と表すことにする。

- (1) ある時刻 t で $d(P_1(t), P_2(t)) \leq 1$ が成立した。ベクトル $\vec{e_1} - \vec{e_2}$ と、ベクトル $\vec{a_1}$ とのなす角度を θ とおく。このとき $|\sin \theta| \leq \frac{1}{1000}$ となることを示せ。
- (2) 角度 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ を $\theta_1 = \angle B_1A_1A_2, \theta_2 = \angle B_2A_2A_3, \theta_3 = \angle B_3A_3A_1$ によって定義する。 α を $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ かつ $\sin \alpha = \frac{1}{1000}$ をみたす実数とする。(1) と同じ仮定のもとで、 $\theta_1 + \theta_2$ の値のとりうる範囲を α を用いて表せ。
- (3) 時刻 t_1, t_2, t_3 のそれぞれにおいて、次が成立した。

$$d(P_2(t_1), P_3(t_1)) \leq 1, \quad d(P_3(t_2), P_1(t_2)) \leq 1, \quad d(P_1(t_3), P_2(t_3)) \leq 1$$

このとき、時刻 $T = \frac{1000}{\sqrt{3}}$ において同時に

$$d(P_1(T), O) \leq 3, \quad d(P_2(T), O) \leq 3, \quad d(P_3(T), O) \leq 3$$

が成立することを示せ。

