

東京大学（文科） 2008 年 第 4 問

p を自然数とする。次の関係式で定められる数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を考える。

$$\begin{cases} a_1 = p, & b_1 = p + 1 \\ a_{n+1} = a_n + pb_n & (n = 1, 2, 3, \dots) \\ b_{n+1} = pa_n + (p + 1)b_n & (n = 1, 2, 3, \dots) \end{cases}$$

(1) $n = 1, 2, 3, \dots$ に対し, 次の 2 つの数がともに p^3 で割り切れることを示せ。

$$a_n - \frac{n(n-1)}{2}p^2 - np, \quad b_n - n(n-1)p^2 - np - 1$$

(2) p を 3 以上の奇数とする。このとき, a_p は p^2 で割り切れるが, p^3 では割り切れないことを示せ。