

東京大学 (理科) 2006 年 第 5 問

$a_1 = \frac{1}{2}$ とし, 数列 $\{a_n\}$ を漸化式

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{(1 + a_n)^2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

によって定める。このとき, 以下の問いに答えよ。

- (1) 各 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対し $b_n = \frac{1}{a_n}$ とおく。 $n > 1$ のとき, $b_n > 2n$ となることを示せ。
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$ を求めよ。
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n$ を求めよ。