

2 つの関数

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$$

$$g(x) = px^3 + qx^2 + rx$$

が次の 5 つの条件を満たしているとする。

$$\begin{aligned} f'(0) &= g'(0), & f(-1) &= -1, & f'(-1) &= 0, \\ g(1) &= 3, & g'(1) &= 0 \end{aligned}$$

ここで、 $f(x)$ 、 $g(x)$ の導関数をそれぞれ $f'(x)$ 、 $g'(x)$ で表している。

このような関数のうちで、定積分

$$\int_{-1}^0 \{f''(x)\}^2 dx + \int_0^1 \{g''(x)\}^2 dx$$

の値を最小にするような $f(x)$ と $g(x)$ を求めよ。

ただし、 $f''(x)$ 、 $g''(x)$ はそれぞれ $f'(x)$ 、 $g'(x)$ の導関数を表す。