

東京大学（理科） 2001 年 第 5 問

容量 1 リットルの m 個のビーカー（ガラス容器）に水が入っている。 $m \geq 4$ で空のビーカーは無い。入っている水の総量は 1 リットルである。また x リットルの水が入っているビーカーがただ一つあり、その他のビーカーには x リットル未満の水しか入っていない。

このとき、水の入っているビーカーが 2 個になるまで、次の (a) から (c) までの操作を、順に繰り返し行う。

- (a) 入っている水の量が最も少ないビーカーを一つ選ぶ。
- (b) さらに、残りのビーカーの中から、入っている水の量が最も少ないものを一つ選ぶ。
- (c) 次に、(a) で選んだビーカーの水を (b) で選んだビーカーにすべて移し、空になったビーカーを取り除く。

この操作の過程で、入っている水の量が最も少ないビーカーの選び方が一通りに決まらないときは、そのうちのいずれも選ばれる可能性があるものとする。

- (1) $x < \frac{1}{3}$ のとき、最初に x リットルの水の入っていたビーカーは、操作の途中で空になって取り除かれるか、または最後まで残って水の量が増えていることを証明せよ。
- (2) $x > \frac{2}{5}$ のとき、最初に x リットルの水の入っていたビーカーは、最後まで x リットルの水が入ったままに残ることを証明せよ。