

東京大学（理科） 2000 年 第 3 問

$a > 0$ とする。正の整数 n に対して、区間 $0 \leq x \leq a$ を n 等分する点の集合

$$\left\{ 0, \frac{a}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}a, a \right\}$$

の上で定義された関数 $f_n(x)$ があり、次の方程式を満たす。

$$\begin{cases} f_n(0) = c, \\ \frac{f_n((k+1)h) - f_n(kh)}{h} = \{1 - f_n(kh)\} f_n((k+1)h) \end{cases}$$

$$(k = 0, 1, \dots, n-1)$$

ただし、 $h = \frac{a}{n}$ 、 $c > 0$ である。

このとき、以下の問いに答えよ。

(1) $p_k = \frac{1}{f_n(kh)}$ ($k = 0, 1, \dots, n$) とおいて p_k を求めよ。

(2) $g(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(a)$ とおく。 $g(a)$ を求めよ。

(3) $c = 2, 1, \frac{1}{4}$ それぞれの場合について、 $y = g(x)$ の $x > 0$ でのグラフをかけ。