

東京大学（理科） 1999 年 第 2 問

複素数 z_n ($n = 1, 2, \dots$) を

$$z_1 = 1, \quad z_{n+1} = (3 + 4i)z_n + 1$$

によって定める。ただし i は虚数単位であり、また、複素数 $z = x + iy$ (x, y は実数) に対して、 $|z|$ を

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

で定義する。

(1) すべての自然数 n について、

$$\frac{3 \times 5^{n-1}}{4} < |z_n| < \frac{5^n}{4}$$

が成り立つことを示せ。

(2) 実数 $r > 0$ に対して、 $|z_n| \leq r$ を満たす z_n の個数を $f(r)$ とおく。このとき、

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{f(r)}{\log r}$$

を求めよ。