

東京大学（理科） 1998 年 第 5 問

θ は $0 \leq \theta < 2\pi$ を満たす実数とする。 xy 平面にベクトル

$$\vec{a} = (\cos \theta, \sin \theta), \quad \vec{b} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

をとり，点 $P_n, Q_n, n = 1, 2, \dots$ を

$$\begin{cases} \overrightarrow{OP_1} = (1, 0) \\ \overrightarrow{OQ_n} = \overrightarrow{OP_n} - \left(\vec{a} \cdot \overrightarrow{OP_n} \right) \vec{a} \\ \overrightarrow{OP_{n+1}} = 4 \left\{ \overrightarrow{OQ_n} - \left(\vec{b} \cdot \overrightarrow{OQ_n} \right) \vec{b} \right\} \end{cases}$$

で定める。ただし， O は原点で， $\vec{a} \cdot \overrightarrow{OP_n}$ および $\vec{b} \cdot \overrightarrow{OQ_n}$ はベクトルの内積を表す。

$\overrightarrow{OP_n} = (x_n, y_n)$ とおく。数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ がともに収束する θ の範囲を求めよ。さらに，このような θ に対して，極限值

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

を求めよ。