

東京大学 (理科) 1994 年 第 4 問

$0 < c < 1$ とする。 $0 \leq x < 1$ において連続な関数 $f(x)$ に対して

$$f_1(x) = f(x) + \int_0^c f(t) dt, \quad f_2(x) = f(x) + \int_0^c f_1(t) dt$$

とおく。以下、関数 $f_3(x)$, $f_4(x)$, $\dots\dots$ を順次

$$f_n(x) = f(x) + \int_0^c f_{n-1}(t) dt \quad (n = 3, 4, \dots\dots)$$

により定める。また,

$$g(c) = \int_0^c f(t) dt$$

とし, $n = 1, 2, 3, \dots\dots$ に対し

$$g_n(c) = \int_0^c f_n(t) dt$$

とおく。このとき, $0 < x < 1$ を満たす任意の実数 x に対し

$$xf(x) = g(x) + x \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x)$$

が成り立ち, さらに $f(0) = 1$ となるような $f(x)$ を定めよ。