

東京大学（理科） 1992 年 第 3 問

a, b を正の実数とする。座標空間の 4 点 $P(0, 0, 0)$, $Q(a, 0, 0)$, $R(0, 1, 0)$, $S(0, 1, b)$ が半径 1 の同一球面上にあるとき、 P, Q, R, S を頂点とする四面体に内接する球の半径を r とすれば、次の二つの不等式が成り立つことを示せ。

$$\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{20}{3}, \quad \frac{1}{r} \geq 2\sqrt{\frac{2}{3}} + 2\sqrt{\frac{5}{3}}$$